УДК 517.5

И. И. Цыганок

Некоторые свойства одного класса N-функций

В данной заметке изучается класс N-функций, удовлетворяющих Δ_Φ-условию, впервые введенный в рассмотрение М. А. Красносельским и Я. Б. Рутицким (см. [1]).

Цель заметки состоит в том, чтобы пополнить сведения, относящиеся к малоизученному классу N-функций, удовлетворяющих Δ_Φ-условию.

Функции $M(u)$ и $N(v)$ $(-\infty < u, v < \infty)$ называют взаимно дополнительными N-функциями, если они могут быть представлены в виде

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)\, dt, \quad N(v) = \int_0^{|v|} q(t)\, dt,$$

где $p(t)$ и $q(t)$ — положительные при $t > 0$, непрерывные справа, неубывающие функции, удовлетворяющие условиям

$$p(0) = q(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} q(t) = \infty$$

и связанные соотношениями $q(s) = \sup\limits_{p(t)\leqslant s} t$, $p(t) = \sup\limits_{q(s)\leqslant t} s$. Пусть $\Phi(u)$ — произвольная фиксированная N-функция. Будем говорить, что N-функция $M(u)$ удовлетворяет одному из условий: Δ_3, Δ^2, Δ_Φ, если существует такая постоянная $k > 0$, что для всех достаточно больших значений u выполняются соответственно неравенства

$$|u| M(u) \leqslant M(ku), \quad M^2(u) \leqslant M(ku), \quad \Phi[M(u)] \leqslant M(ku). \tag{1}$$

Выпуклую функцию $Q(u)$ называют главной частью N-функции $M(u)$, если для всех достаточно больших u выполняется равенство $Q(u) = M(u)$. Для произвольной N-функции $M(u)$ справедливы неравенства (см. [1])

$$M(u) \leqslant up(u) \leqslant M(2u). \tag{2}$$

Подробное изложение теории N-функций читатель найдет в монографии [1]. Некоторые результаты, относящиеся непосредственно к изучаемому здесь классу N-функций, изложены в работах [2—4].

Прежде всего приведем один из признаков того, что N-функция $M(u)$ принадлежит рассматриваемому классу.

Теорема 1. *Для того, чтобы N-функция $M(u)$, удовлетворяющая Δ_3-условию, удовлетворяла также Δ_Φ-условию, необходимо и достаточно, чтобы для достаточно больших значений u выполнялось неравенство*

$$\Phi[p(u)] \leqslant p(ku) \quad (k > 1). \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для больших значений u выполняются неравенства

$$\Phi[M(u)] \leqslant M(k_1 u), \quad uM(u) \leqslant M(k_2 u) \quad (k_1, k_2 > 1).$$

Следовательно, в силу монотонности $\Phi(u)$ имеем

$$\Phi[uM(u)] \leqslant \Phi[M(ku)] \leqslant M(k^2 u) \quad (k = \max\{k_1, k_2\}),$$

откуда в силу неравенства (2) получаем

$$\Phi[u^2 p(u)] \leqslant M(2k^2 u) \leqslant 2k^2 up(2k^2 u).$$

Далее, так как N-функция $\Phi(u)$ выпукла (см. [1, с. 18]), для достаточно больших значений u имеем

$$u^2 \Phi[p(u)] \leqslant 2k^2 up(2k^2 u), \quad \Phi[p(u)] \leqslant p(k_0 u) \quad (k_0 = 2k^2).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3-условию и для ее правой производной выполняется неравенство (3). Тогда из (2) для больших u имеем

$$\Phi\left[\frac{M(u)}{u}\right] \leqslant \frac{M(2ku)}{ku}. \tag{4}$$

В силу Δ_3-условия для больших значений u выполняется неравенство

$$u^2 M(u) \leqslant M(k_1 u). \tag{5}$$

Из неравенства (4) в силу (5) и монотонности функции $\Phi(u)$ получаем

$$\Phi\left[\frac{u^2 M(u)}{k_1 u}\right] \leqslant M(2kk_1 u), \quad \Phi[M(u)] \leqslant M(k_2 u),$$

где $k_2 = 2kk_1$. Теорема доказана.

Заметим, что класс N-функций, удовлетворяющих Δ_Φ-условию, является широким обобщением ранее изученных классов N-функций, удовлетворяющих Δ_3- и Δ^2-условиям (см. [1]). Δ^2-условие — это частный случай Δ_Φ-условия при $\Phi(u) = u^2$. Δ_3-условие равносильно Δ_Φ-условию при $\Phi(u) = N(u)$, где $N(u)$ — N-функция, дополнительная к $M(u)$.

Это следует из того, что N-функция $M(u)$, удовлетворяющая Δ_3-условию, эквивалентна функции $N[M(u)]$ (см. [1, с. 54]).

Доказанная теорема обобщает следующую теорему, принадлежащую М. А. Красносельскому и Я. Б. Рутицкому (см. [1, с. 57]).

Теорема 2. *Пусть правая производная* $p(u)$ N-функции $M(u)$ *при больших значениях аргумента удовлетворяет условию* $p^2(u) \leqslant p(ku)$ $(k > 1)$. *Тогда* $M(u)$ *удовлетворяет* Δ^2-*условию.*

Теперь нетрудно убедиться, что изучаемый класс N-функций не пуст.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi(u)$ — *произвольная* N-*функция, растущая не медленнее степенной* N-*функции. Тогда существует* N-*функция* $M(u)$, *удовлетворяющая* Δ_Φ-*условию.*

Доказательство. Предположим, что N-функция $\Phi(u)$ растет не медленнее степенной функции u^α $(\alpha > 1)$, так как для $\Phi(u) = u^\alpha$ получаем как частный случай класс N-функций, удовлетворяющих Δ^2-условию, непустота которого известна. Отсюда также следует непустота классов N-функций, удовлетворяющих Δ_Φ-условию для функции $\Phi(u)$, растущей медленнее любой степенной функции u^α $(\alpha > 1)$.

Для доказательства теоремы укажем простой способ аналитического построения N-функции $M(u)$, удовлетворяющей Δ_Φ-условию.

Условимся считать, что $\Phi(u) > u$ при $u > 1$. В общем случае ход рассуждений не изменится, так как в силу определения для достаточно больших значений аргумента $\Phi(u) > u$.

Определим правую производную $p(t)$ N-функции $M(u)$ следующим образом:

$$p(t) = t^2, \text{ если } t \in [0, 1),$$

$$p(t) = \Phi[\Phi(1)], \text{ если } t \in [1, 2),$$

$$p(t) = \Phi\{\Phi[\Phi(2)]\}, \text{ если } t \in [2, 3), \text{ и т. д.}$$

$$p(t) = \Phi[\Phi \ldots \Phi(n)], \text{ если } t \in [n, n+1).$$

Ясно, что так определенная правая производная $p(t)$ при любом $t > 1$ и любом $k \geqslant 2$ удовлетворяет условию

$$\Phi[p(t)] \leqslant p(kt). \tag{6}$$

Так как по условию теоремы N-функция $\Phi(u)$ растет не медленнее степенной функции u^α $(\alpha > 1)$, то функция $p(t)$, удовлетворяющая неравенству (6), удовлетворяет также условию теоремы (2) и, следовательно, N-функция $M(u)$ с правой производной $p(t)$ удовлетворяет Δ^2-условию и, тем более, Δ_3-условию (см. [1, с. 55]).

Таким образом, рассматриваемая N-функция $M(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, т. е. она удовлетворяет Δ_Φ-условию. Теорема доказана.

Указанный способ позволяет строить N-функции, удовлетворяющие Δ_Φ-условию для любой фиксированной N-функции $\Phi(u)$. Например, для того, чтобы построить N-функцию $M(u)$, удовлетворяющую Δ_Φ-условию, если главная часть $\Phi(u) = e^u$, достаточно правую производную $p(t)$ N-функции $M(u)$ задать следующим образом:

$$p(t) = t^2\,[0, 1), \;\; p(t) = e^e\,[1, 2), \;\; p(t) = e^{e^{e^2}}\,[2, 3) \text{ и т. д.}$$

Выясним вопрос о быстроте роста N-функций, удовлетворяющих Δ_Φ-условию.

Ранее автор доказал, что всякая N-функция, удовлетворяющая Δ_Φ-условию, растет быстрее любой степенной функции (см. [4]).

Дополним это утверждение следующей теоремой.

Теорема. 4. *Пусть* N-*функция* $\Phi(u)$ *растет не медленнее степенной функции* u^γ $(\gamma > 1)$. *Тогда для* N-*функции* $M(u)$, *удовлетворяющей* Δ_Φ-*условию, при больших значениях* u *выполняется неравенство* $M(u) > \Phi(e^{u^\alpha})$ $(\alpha > 0)$.

Доказательство. Непосредственно из условия теоремы для больших значений аргумента имеем

$$M^{\gamma}(u) < \Phi[M(u)] \leqslant M(ku) \quad (k > 1).$$

Отсюда следует, что для любого натурального числа n для достаточно больших u выполняется неравенство

$$M^{\gamma^n}(u) \leqslant M(k^n u). \tag{7}$$

Из неравенства (7) следует, что N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2-условию. Кроме того, известно, что N-функция, удовлетворяющая Δ^2-условию, растет быстрее, чем функция e^{u^β} для некоторого $\beta > 1$.

Следовательно, для больших значений u выполняется неравенство

$$M(u) > e^{u^\beta}. \tag{8}$$

Из (8) в силу монотонности функции $\Phi(u)$ и Δ_Φ-условия имеем

$$\Phi[e^{u^\beta}] < \Phi[M(u)] \leqslant M(ku) \text{ или } M(u) > \Phi[e^{\left(\frac{u}{k}\right)^\beta}] > \Phi(e^{u^\alpha}) \quad (\alpha < \beta).$$

Теорема доказана.

Заметим, что условия теоремы о том, что N-функция $\Phi(u)$ растет не медленнее степенной, можно заменить более слабым. Достаточно потребовать, чтобы суперпозиция $\Phi[\Phi(u)]$ росла не медленнее некоторой функции u^γ $(\gamma > 1)$.

Эта теорема обобщает доказанное ранее утверждение (см. [1, с. 57]).

Теорема 5. *Каждая N-функция, удовлетворяющая Δ^2-условию, при больших значениях аргумента растет быстрее, чем некоторая функция e^{u^α}.*

В самом деле, полагая в теореме 4 $\Phi(u) = u^2$, для больших значений u получаем неравенство $M(u) > e^{2u^\alpha}$.

Нетрудно заметить, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3-условию, то она растет быстрее функции $N(u^n)$, где $N(v)$ — N-функция, дополнительная к $M(u)$, n — произвольное натуральное число.*

В самом деле, так как Δ_3-условие эквивалентно Δ_Φ-условию при $\Phi(u) = N(u)$, то для больших значений u выполняется неравенство $N[M(u)] \leqslant M(ku)$ (см. [1, с. 54]). Кроме того, известно, что N-функция, удовлетворяющая Δ_3-условию, растет быстрее любой степенной (см. [1, с. 49]). Отсюда в силу предыдущего замечания следует утверждение теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_Φ-условию для функции $\Phi(u)$, растущей быстрее любой степенной. Тогда N-функция $M(u)$ растет быстрее любой функции вида e^{u^n}.*

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся методом, приведенным в работе [1, с. 56]. Из условия теоремы вытекает, что для любого натурального n при некотором $k > 1$ для достаточно больших значений u выполняется неравенство $M^n(u) \leqslant M(ku)$.

Пусть при $u \geqslant u_0$ выполняется неравенство

$$M^{2^m}(u) \leqslant M(ku) \tag{9}$$

Возьмем теперь произвольное фиксированное значение u и подберем такое натуральное число n, чтобы выполнялись неравенства

$$k^n u_0 < u < k^{n+1} u_0. \tag{10}$$

Тогда $2^n u_0^{\ln_k 2} < u^{\ln_k 2} \leqslant 2^{n+1} u_0^{\ln_k 2}$, откуда следует

$$2^n \geqslant \left(\frac{u}{ku_0}\right)^{\ln_k 2}, \quad 2^{mn} \geqslant \left(\frac{u}{ku_0}\right)^{m \ln_k 2}, \tag{11}$$

где m — произвольное натуральное число.

Непосредственно из (9)—(11) получаем

$$2^m \ln M(u) < \ln M(ku), \ \ln M(u) > \ln M(k^n u_0) > 2^{mn} \ln M(u_0) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{u}{ku_0}\right)^{m \ln_k 2} \ln M(u_0).$$

Отсюда следует, что при любом натуральном n для достаточно больших u выполняется неравенство

$$\ln M(u) > u^n \text{ или } M(u) > e^{u^n}.$$

Теорема доказана.

Как уже отмечалось, класс N-функций, удовлетворяющих Δ_3-условию, является частным случаем класса N-функций, удовлетворяющих Δ_Φ-условию. В связи с этим может возникнуть предположение, что всякая N-функция, удовлетворяющая Δ_3-условию, растет быстрее некото ой функции e^{u^α} Однако это не так. Рассмотрим, например, известную N-функцию, с главной частью $u^{\ln u}$ (см. [1]). Эта N-функция, как известно, удовлетворяет Δ_3-условию, но не удовлетворяет Δ^2-условию. Легко убедиться, что так определенная N-функция растет медленнее любой функции вида e^{u^α} $(\alpha > 0)$.

Отметим также, что утверждение, обратное теореме 7, неверно. Более того, как показано автором (см. [3]), существуют как угодно быстро растущие N-функции, однако неудовлетворяющие Δ_Φ-условию ни для одной функции $\Phi(u)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Физматгиз, 1958. 271 с.
2. Андо Ц. О некоторых классах выпуклых функций. — ДАН СССР, 1961, **136**, № 5, с. 1007—1010.
3. Цыганок И. И. О некоторых свойствах одного класса выпуклых функций. — Функциональный анализ и теория функций, Казань, 1964, вып. 2, с. 321—330.
4. Циганок І. І. Про один клас N-функцій. Допов.АН УРСР, 1963, № 10, с. 1284—1287.

Днепропетровский
химико-технологический институт

Поступила в редакцию 16.III. 1976 г.
после переработки — 20.IX. 1976 г.