УДК 513.88

Т. Я. Азизов, Е. Б. Усвяцова

О полноте и базисности собственных и присоединенных векторов операторов класса $K(H)$

В данной заметке излагается одно из приложений результатов статьи [1], и мы будем придерживаться используемой там терминологии и обозначений.

Скажем, что ограниченный оператор A принадлежит классу $K(H)$ ($A \in K(H)$), если оператор A — J-диссипативный и коммутирует с J-диссипативным оператором B_A, удовлетворяющим условию (H).

В работе [2] приводится критерий, который для J-диссипативных операторов в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$ при классических условиях (для обычных диссипативных операторов) обеспечивает полноту системы корневых векторов, т. е. соотношение

$$\mathfrak{E}(A) \equiv \text{з.л.о.}\, \{\mathfrak{L}_\lambda(A)\}_{\lambda \in \sigma_p(A)} = \mathfrak{H},$$

где $\mathfrak{L}_\lambda(A)$ — корневой линеал оператора A, отвечающий собственному значению λ. Заметка [3] посвящена выводу критерия базисности корневых векторов вполне непрерывных J-самосопряженных операторов в $\Pi_\varkappa$. В общих J-пространствах даже для вполне непрерывных J-самосопряженных операторов не всегда имеет место полнота корневых векторов (см. [4]).

Цель этой работы — перенесение результата из работы [3] и части результатов из [2] на операторы класса $K(H)$. При этом использован следующий результат Е. Б. Усвяцовой, доказательство которого приводится в другой ее работе.

Теорема. *Пусть* $A \in K(H)$ *и* $(\bar{\lambda} =)\, \lambda \in \sigma_p(A)$. *Тогда* $\mathfrak{L}_\lambda(A) = L [\dot{+}] M$, *где* M — *проекционно полное подпространство из* $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$, *а* $\dim L < \infty$ *и* $AL \subset L$.

Теорема 1. (ср. [2]). *Пусть* (K) — *некоторый комплекс свойств, инвариантных относительно операции ограниченного проектирования и эквивалентной перенормировки пространства, и пусть всякий вполне непрерывный диссипативный оператор, обладающий этим комплексом свойств, имеет полную систему корневых векторов. Тогда вполне непрерывный оператор* $A \in K(H)$ *имеет полную систему корневых векторов в том и только в том случае, когда линеал* $\mathfrak{L}_0(A)$ *невырожден.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$. Если линеал $\mathfrak{L}_0(A)$ вырожден, то, в силу приведенной теоремы существует вектор $(0 \neq)\, x_0 \in \operatorname{Ker} A$, J-ортогональный $\mathfrak{L}_0(A)$. В силу [2] (предложение 12°-bis) получим $[x_0, \mathfrak{E}(A)] = 0$ — противоречие.

Достаточность. Пусть линеал $\mathfrak{L}_0(A)$ невырожден. Так как $B_A \mathfrak{E}(A) \subset \mathfrak{E}(A)$, то, в силу [2] (предложение 9°) и [1], из вырожденности $\mathfrak{E}(A)$ следует, что размерность его изотропного подпространства $\mathfrak{E}_0(A)$ конечна и потому существует вектор $x_0 \in \bigcup \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$, изотропный в $\mathfrak{E}(A)$.

Из [2, предложение 14°] вытекает $x_0 \in \operatorname{Ker} A$ — противоречие. Итак, $\mathfrak{E}(A)$ невырождено. Более того, $\mathfrak{E}(A)$ — проекционно полное подпространство. Последнее следует из того, что, в силу [2, теорема 1, предложения 10° и 12°-bis] и [1], подпространство $\mathfrak{E}(A)$ можно представить в виде прямой суммы правильного и конечномерного подпространств. Невырожденность $\mathfrak{E}(A)$ влечет при этих условиях его проекционную полноту. Следовательно, имеет место разложение пространства $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}(A) [\dot{+}] \mathfrak{E}(A)^{[\perp]}$. Пусть P — J-ортогональный проектор на $\mathfrak{E}(A)^{[\perp]}$. Нетрудно проверить, что оператор $\widehat{B} = PB_AP$ является J-диссипативным, удовлетворяющим условию (H) в $\mathfrak{E}(A)^{[\perp]}$, и оператор $\widehat{A} = PAP$ коммутирует с ним, т. е. $\widehat{A} \in K(H)$. Так же, как и в [2] (предложение 15°), доказывается, что $\widehat{A}$ — вольтерров оператор и $0 \in \sigma_c(\widehat{A})$. Из [1] и [2] (предложение 9°) получаем, что у операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ имеется общее инвариантное подпространство $\mathfrak{N}$ и оно равномерно дефинитно. В силу сделанных предположений оператор $\widehat{A}|_{\mathfrak{N}}$ обладает комплексом свойств (K) и, с точностью до эквивалентной перенормировки $\mathfrak{N}$, является диссипативным оператором. Следовательно, $\mathfrak{E}(\widehat{A}|_{\mathfrak{N}}) = \mathfrak{N}$. Из вольтерровости оператора $\widehat{A}$ и включения $0 \in \sigma_c(\widehat{A})$ следует, что $\mathfrak{N} = \{0\}$. Отсюда и $\mathfrak{E}(A)^{[\perp]} = \{0\}$, т. е. $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$.

Доказанная теорема — «мост» позволяет получать для вполне непрерывных операторов $A \in K(H)$ целый ряд теорем, аналогичных тем, что имеют место для обычных диссипативных операторов и, в частности, все те теоремы, аналоги которых для пространств $\Pi_\varkappa$ получены в [2]. Исключение составляет аналог известной теоремы Лившица.

Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть оператор $A \in K(H)$, а оператор $\dfrac{A - A^c}{2i}$ — ядерный. Тогда, если $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{L}_0(A)$ невырождено и $\sum \operatorname{Im} \lambda_k = \operatorname{Sp} \dfrac{A - A^c}{2i}$, где оператор A^c — J-сопряженный с A, а λ_k пробегает множество всех собственных значений оператора A с учетом кратности.*

Однако в условиях предложения 1 для простого или вполне непрерывного оператора A из невырожденности $\mathfrak{L}_0(A)$ и равенства $\sum \operatorname{Im} \lambda_k = \operatorname{Sp} \dfrac{A - A^c}{2i}$ не следует равенство $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$ — существуют простые контрпримеры.

Теорема 2. *Если $A\, (\in K(H))$ — вполне непрерывный J-самосопряженный оператор, то для того, чтобы в $\mathfrak{H}$ существовал базис из корневых векторов оператора A, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{L}_0(A)$ было невырождено.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.

Достаточность. Аналогично доказательству теоремы 1, получаем $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{H}$. Из $A \in K(H)$, получаем, что $\mathfrak{E}(A) = \mathfrak{L}_0(A) [\dot{+}] \mathfrak{L}_1 [\dot{+}] \mathfrak{L}_2 [\dot{+}] \mathfrak{L}_3$, где $A\mathfrak{L}_i \subset \mathfrak{L}_i$; $\dim \mathfrak{L}_1 < \infty$; $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ — равномерно дефинитные подпространства. Отсюда и следует существование искомого базиса.

Замечание. Справедливо следующее утверждение: J-самосопряженный оператор A принадлежит классу $K(H)$ тогда и только тогда, когда у него есть максимальное неотрицательное инвариантное подпространство, представимое в виде суммы равномерно дефинитного и конечномерного нейтрального подпространств.

Полученные результаты находят свое применение, например, при исследовании вопросов полноты и базисности корневых векторов полиномиальных операторных пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азизов Т. Я. Об инвариантных подпространствах коммутативных семейств операторов в пространстве с индефинитной метрикой.— УМЖ, 1976, **28**, № 3, с. 293—299.
2. Азизов Т. Я. Диссипативные операторы в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 3, с. 639—662.
3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Критерий полноты и базисности системы корневых векторов вполне непрерывного J-самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина $\Pi_{\varkappa}$. — Мат. исследования, 1971, **6**, № 1, с. 158—161.
4. Азизов Т. Я. Критерий невырожденности замкнутой линейной оболочки корневых векторов J-диссипативных вполне непрерывных операторов в пространстве Понтрягина $\Pi_{\varkappa}$.— В кн.: Сб. тр. аспир. мат. ф-та, Воронежский гос. ун-т, 1971, **1**, с. 1—5.

Воронежский
государственный университет

Поступила в редакцию
24.VII.1976 г.