УДК 517.548 32

П. Г. Башкарев

Об алгебре сингулярных интегральных операторов с конечной коммутативной группой сдвигов на составном контуре

Конечная группа гомеоморфизмов простого замкнутого контура Γ на себя имеет следующую структуру (см. [1]): 1) конечная группа сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов является циклической группой; 2) любая конечная группа сохраняющих и изменяющих ориентацию гомеоморфизмов контура Γ на себя представляется в виде $G = \{e, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}, \beta, \alpha \circ \beta, \ldots \ldots, \alpha^{n-1} \circ \beta\}$, где гомеоморфизм α сохраняет ориентацию, а гомеоморфизм β изменяет ориентацию.

В случае составного контура, т. е. контура, состоящего из нескольких простых замкнутых линий, структура группы не имеет столь простого описания. Например, пусть контур Γ состоит из двух компонентов Γ_1 и Γ_2. На Γ заданы сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} \alpha_1(t), & t \in \Gamma_1, \\ t, & t \in \Gamma_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \alpha_2(t) = \begin{cases} \alpha_2(t), & t \in \Gamma_2, \\ t, & t \in \Gamma_1, \end{cases}$$

причем $\alpha_1[\alpha_1(t)] \equiv t$ и $\alpha_2[\alpha_2(t)] \equiv t$. Нетрудно видеть, что конечная группа гомеоморфизмов, порожденная сдвигами $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, является коммутативной, но уже не будет циклической. Если же положить контур Γ состоящим из четырех компонентов Γ_r, $r = 1, 2, 3, 4$, а сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ действующими по правилу: $\alpha_1(\Gamma_r) = \Gamma_{r+1}$, $r = 1, 2$, и $\alpha_1(\Gamma_3) = \Gamma_1$, $\alpha_2(\Gamma_1) = \Gamma_4$, $\alpha_2(\Gamma_4) = \Gamma_1$, то такая конечная группа сдвигов не будет даже коммутативной.

Пусть задан составной контур $\Gamma = \bigcup\limits_{r=1}^{s} \Gamma_r$, состоящий из конечного числа замкнутых простых ориентированных кривых Ляпунова Γ_r. На нем заданы сдвиги $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, порождающие конечную коммутативную группу гомеоморфизмов контура Γ на себя с сохранением ориентации на Γ и отображающие каждый компонент Γ_r на себя или переводящие компоненты контура Γ друг в друга. Будем предполагать, что $\alpha_k' \neq 0$ и $\alpha_k' \in H(\Gamma)$.

Наименьшие целые числа n_k, для которых $\alpha_k^{n_k} \equiv t$ (n_k-я итерация α_k), назовем порядками сдвига α_k.

Через W_k обозначим оператор сдвига $(W_k\varphi)(t) = \varphi[\alpha_k(t)]$. Пусть N — наименьшее общее кратное чисел $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$.

При сделанных предположениях всевозможные произведения $W_1^{k_1} \cdot W_2^{k_2} \cdot \ldots$ $\ldots \cdot W_m^{k_m}$ образуют конечную коммутативную группу порядка N.

Рассмотрим оператор

$$M = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \ldots \sum_{k_m=0}^{n_m-1} [a_{k_1\ldots k_m} I + b_{k_1\ldots k_m} S]\, W_1^{k_1} W_2^{k_2} \ldots W_m^{k_m} + T, \tag{1}$$

где $a_{k_1\ldots k_m}$, $b_{k_1\ldots k_m} \in C(\Gamma)$, $(S\varphi)(t) = \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, dt$, T — вполне непрерывный оператор.

Частные случаи оператора вида (1) рассмотрены в работах [2 и 3]. В статье [2] оператор (1) рассматривается в случае одного сдвига $\alpha(t)$ порядка n на простом замкнутом контуре. В работе [3] контур Γ составной, а сингулярный интегральный оператор содержит два коммутативных сдвига, переводящих каждую компоненту контура Γ на себя. В дальнейшем будем придерживаться терминологии работы [2].

В данной заметке вводится понятие символа оператора (1), действующего в $L_p(\Gamma)$, и в терминах символа выражается условие нетеровости и вычисляется индекс оператора (1).

Операторы типа (1) образуют подалгебру A алгебры линейных ограниченных операторов, действующих в $L_p(\Gamma)$. Через D обозначим двусторонний идеал всех вполне непрерывных операторов.

Наряду с оператором (1) введем в рассмотрение так называемые сопутствующие операторы

$$M_{l_1\ldots l_m} = \sum_{k_1\ldots k_m} [a_{k_1\ldots k_m} I + b_{k_1\ldots k_m} S] \cdot [\varepsilon_1^{l_1}]^{k_1} \ldots [\varepsilon_m^{l_m}]^{k_m} W_1^{k_1} \ldots W_m^{k_m}, \tag{2}$$

где функции $\varepsilon_k(t)$ — постоянные на каждом компоненте контура Γ. Они определяются следующим образом: рассматривается сужение сдвига α_j на отдельный компонент Γ_ν, порядок этого сужения обозначим через $\omega_{j\nu}$, тогда на Γ_ν значение функции $\varepsilon_j(t)$ положим равной $e^{\frac{2\pi i}{\omega_{j\nu}}}$.

Лемма. *Сопутствующие операторы все нетеровы или ненетеровы одновременно. Если они нетеровы, то их индексы равны.*

Доказательство. Возьмем сопутствующий оператор $M_{l_1\ldots l_m}$. Оператор $W_1^{l_1} W_2^{l_2} \ldots W_m^{l_m}$ отвечает сдвигу, который по условию сохраняет направление обхода. Построим функцию $z(t)$, отличную от нуля и удовлетворяющую равенству

$$(W_1^{k_1} W_2^{k_2} \ldots W_m^{k_m} z_{l_1 l_2 \ldots l_m})(t) = [\varepsilon_1^{l_1}(t)]^{k_1} [\varepsilon_2^{l_2}(t)]^{k_2} \ldots [\varepsilon_m^{l_m}(t)]^{k_m} z_{l_1 l_2 \ldots l_m}(t),$$

где $0 \leqslant l_i \leqslant n_i - 1$, $0 \leqslant k_i \leqslant n_i - 1$.

Пусть сдвиг $\alpha_1^{l_1} \circ \alpha_2^{l_2} \circ \ldots \circ \alpha_m^{l_m}$ отображает каждый компонент контура $\Gamma = \bigcup_{r=1}^{s} \Gamma_r$ на себя. Из работы [1] следует, что итерации этого сдвига образуют циклическую группу, образующую которой обозначим через α^*. Порядок n^* сдвига равен наименьшему общему кратному порядков $\{W_1, W_2, \ldots, W_m\}$. В работе [2] для одного замкнутого контура и циклической группы сдвигов построены непрерывные, отличные от нуля функции $z_l(t)$, удовлетворяющие условиям

$$z_l[\alpha_k(t)] = \omega_k^l z_l(t),\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где $\omega_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$.

В нашем случае произведение $[\varepsilon_1^{l_1}(t)]^{k_1} \ldots [\varepsilon_m^{l_m}(t)]^{k_m}$ — μ-я степень первообразного корня ε^* степени n^*, т. е. $(\varepsilon^*)^{n^*} = 1$. Тогда уравнение $\sum_{i=1}^{m} l_i k_i \equiv \equiv \mu \pmod{n^*}$, $0 \leqslant \mu \leqslant n^* - 1$, разрешимо; и, следовательно, справедливо равенство

$$z_{l_1 \ldots l_m}[\alpha_{l_1}^{k_1}(t) \circ \alpha_{l_2}^{k_2}(t) \circ \ldots \circ \alpha_m^{k_m}(t)] = [\varepsilon_1^{l_1}(t)]^{k_1}[\varepsilon_2^{l_2}(t)]^{k_2} \ldots [\varepsilon_m^{l_m}(t)]^{k_m} z_{l_1 \ldots l_m}(t).$$

Пусть сдвиг $\alpha_{l_1} \circ \alpha_{l_2} \circ \ldots \circ \alpha_{l_m}$ действует по правилу $\Gamma_{i_1} \to \Gamma_{i_2} \to \ldots \ldots \to \Gamma_{i_s} \to \Gamma_{i_1}$. Тогда сдвиг $\alpha_{l_1}^s \circ \alpha_{l_2}^s \circ \ldots \circ \alpha_{l_m}^s$ переводит Γ_{i_1} в Γ_{i_1}, и построение функции $z(t)$ проводится точно так же, как это сделано выше.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что разность $Mz_{l_1 \ldots l_m} - z_{l_1 \ldots l_m} M_{l_1 \ldots l_m}$ — вполне непрерывный оператор. А это означает, что операторы M и $M_{l_1 \ldots l_m}$ нетеровы или ненетеровы одновременно; и в случае нетеровости

$$\operatorname{Ind} M = \operatorname{Ind} M_{l_1 \ldots l_m}. \tag{3}$$

Упорядочим произведения операторов $W_1^{k_1} W_2^{k_2} \ldots W_m^{k_m}$, и для дальнейшего зафиксируем этот порядок. Например, будем располагать их следующим образом:

$$I,\ W_1,\ W_1^2, \ldots, W_1^{n_1-1},\ W_2,\ W_1W_2,\ W_1^2W_2, \ldots, W_1^{n_1-1}W_2, \ldots, W_2^{n_2-1},$$
$$W_1W_2^{n_2-1}, \ldots, W_1^{n_1-1}W_2^{n_2-1}, \ldots, W_1^{n_1-1}W_2^{n_2-1}, \ldots, W_m^{n_m-1}.$$

Через P и Q обозначим матрицы

$$P = \begin{pmatrix} a_{0\ldots0} & a_{10\ldots0} & \ldots & a_{n_1-1\ldots n_m-1} \\ W_1 a_{n_1-10\ldots0} & W_1 a_{0\ldots0} & \ldots & W_1 a_{n_1-2n_2-1\ldots n_m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_1^{n_1-1} \ldots W_m^{n_m-1} a_{1\ldots1} & W_1^{n_1-1} \ldots W_m^{n_1-1} a_{21\ldots1} & \ldots & W_1^{n_1-1} \ldots W_m^{n_m-1} a_{0\ldots0} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} b_{0\ldots0} & b_{10\ldots0} & \ldots & b_{n_1-1\ldots n_m-1} \\ W_1 b_{n_1-10\ldots0} & W_1 b_{0\ldots0} & \ldots & W_1 b_{n_1-2n_2-1\ldots n_m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ W_1^{n_1-1} \ldots W_m^{n_m-1} b_{1\ldots1} & W_1^{n_1-1} \ldots W_m^{n_m-1} b_{21\ldots1} & \ldots & W_1^{n_1-1} \ldots W_m^{n_m-1} b_{0\ldots0} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрицу-функцию $\sigma(t, j) = P + jQ$, где j принимает значения ± 1, назовем символом оператора M.

Теорема. *Фактор-алгебра A/D изоморфна алгебре матриц типа $\sigma(t, j)$. Оператор M нетеров тогда и только тогда, когда символ $\sigma(t, j)$ не вырождается; индекс оператора M выражается через символ формулой*

$$\frac{1}{2N\pi}\{\arg\det[\sigma(t, -1)\sigma^{-1}(t, 1)]\}_\Gamma. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через V оператор

$$V=\frac{1}{\sqrt{N}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} I & I & \dots & I \\ W_1 & W_1\varepsilon_1(t) & \dots & W_1\varepsilon_1^{n_1-1}(t) \\ W_1^2 & W_1^2\varepsilon_1^2(t) & \dots & W_1^2\varepsilon_1^{2(n_1-1)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_1^{n_1-1}\dots W_m^{n_m-1} & W_1^{n_1-1}\dots W_m^{n_m-1}\varepsilon_1^{n_1-1}(t) & \dots & W_1^{n_1-1}\dots W_m^{n_m-1}\varepsilon_1^{n_1-1}(t)\dots\varepsilon_m^{n_m-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Столбцами оператора V являются слагаемые сумм

$$\sum\nolimits_{l_1\dots l_m}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k_1\dots k_m}[\varepsilon_1^{l_1}(t)]^{k_1}\dots[\varepsilon_m^{l_m}(t)]^{k_m}W_1^{k_1}\dots W_m^{k_m}.$$

Порядок столбцов в операторе V и слагаемых в суммах $\Sigma_{l_1\dots l_m}$ совпадает с ранее зафиксированным. Размерность матрицы равна N. Тогда легко проверить, что оператор V обратим, и

$$V^{-1}=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{pmatrix} I & W_1^{n_1-1}\dots W_m^{n_m-1} & \dots & W_1^2 & W_1 \\ I & W_1^{n_1-1}\dots W_m^{n_m-1}\varepsilon_1^{n_1-1}(t) & \dots & W_1^2\varepsilon_1^2(t) & W_1\varepsilon_1(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I & W_1^{n_1-1}\dots W_m^{n_m-1}\varepsilon_1^{n_1-1}(t)\dots\varepsilon_m^{n_m-1}(t) & \dots & W_1^2\varepsilon_1^{2(n_1-1)}(t) & W_1\varepsilon_1^{n_1-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $X_{l_1\dots l_m}=a_{l_1\dots l_m}I+b_{l_1\dots l_m}S$ и рассмотрим оператор

$$R=$$

$$=\begin{pmatrix} X_{0\dots 0} & X_{10\dots 0} & \dots X_{n_1-1\dots n_m-1} \\ W_1X_{n_1-10\dots 0}W_1^{n_1-1} & W_1X_{0\dots 0}W_1^{n_1-1} & \dots W_1X_{n_1-2n_2-1\dots n_m-1}W_1^{n_1-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_1^{n_1-1}\dots W_m^{n_m-1}X_{1\dots 1}W_1\dots W_m & W_1^{n_1-1}\dots W_m^{n_m-1}X_{21\dots 1}W_1\dots W_m & \dots W_1^{n_1-1}\dots W_m^{n_m-1}X_{0\dots 0}W_1\dots W_m \end{pmatrix}.$$

Если ввести сингулярный интегральный оператор, определенный равенством $\widetilde{M}=PI+QS$, то $R=\widetilde{M}+T$, где T — вполне непрерывный оператор. Следовательно, оператор R нетеров тогда и только тогда, когда $\det(P+jQ)\neq 0$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства

$$V^{-1}RV=\begin{pmatrix} M_{0\dots 0} & & 0 \\ & M_{10\dots 0} & \\ 0 & & M_{n_1-1\dots n_m-1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Из этого равенства получаем необходимое и достаточное условия нетеровости оператора M. Действительно, если $\det\sigma(t,j)\neq 0$, то оператор R является нетеровым. Тогда, очевидно, является нетеровым оператор $M_{0\dots}$, т.е. исходный оператор M. Пусть неравенство $\det\sigma(t,j)\neq 0$ не выполняется. Тогда оператор R ненетеров, и из равенства (5) следует, что не является нетеровым по крайней мере один из операторов $M_{0\dots 0}$, $M_{10\dots 0},\dots,M_{l_1\dots l_m}$. В таком случае согласно лемме ненетеровым является и оператор M.

Индекс оператора R выражается по формуле

$$\operatorname{Ind}R=\frac{1}{2\pi}\{\arg\det[\sigma(t,-1)\sigma^{-1}(t,1)]\}_\Gamma.$$

Из формулы (5) следует, что индекс оператора R равен сумме индексов операторов $M_{l_1 \ldots l_m}$; а так как их индексы равны между собой, то

$$\sum_{k_1 \ldots k_m} \operatorname{Ind} M_{l_1 \ldots l_m} = N \operatorname{Ind} M_{0 \ldots 0} = N \operatorname{Ind} M,$$

откуда получаем формулу (4).

Замечание. Известно, что алгебра сингулярных интегральных операторов на составном контуре замкнута. Тогда из доказанной теоремы следует, что алгебра, порожденная операторами вида (1), также является замкнутой. Все результаты этой статьи без существенных изменений переносятся на операторы M с матричными коэффициентами.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность Г. С. Литвинчуку за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башкарев П. Г., Карлович Ю. И., Нечаев А. П. К теории сингулярных интегральных операторов с конечной группой сдвигов.— ДАН СССР, 1974, **219**, № 2, с. 272—274.
2. Кравченко В. Г., Литвинчук Г. С. О символе сингулярного интегрального оператора со сдвигами Карлемана.— УМЖ, 1973, **25**, № 4, с. 541—545.
3. Сосунов А. С. Формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений с двумя сдвигами Карлемана.— Материалы Всесоюзн. конф. по краевым задачам. Казань, 1970, с. 249—253.

Одесский институт
инженеров морского флота

Поступила в редакцию
6.VI.1976 г.