УДК 534.111

П. А. Бондарев

О применении метода усреднения нелинейной механики к решению смешанной задачи для уравнений четвертого порядка в частных производных

Рассмотрим смешанную задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных 4-го порядка

$$D\nabla^4 W + \alpha^2 W_{tt} = \varepsilon f(t, x, y, W, W_t, W_x, W_y, W_{xx}, W_{xy}, W_{yy}) \qquad (1)$$

в области $G = \begin{pmatrix} 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant b \end{pmatrix}$ с краевыми

$$\begin{aligned} &W = 0, \ W_{xx} + \nu W_{yy} = 0 \ \text{при} \ x = 0, x = a, \\ &W = 0, \ W_{yy} + \nu W_{xx} = 0 \ \text{при} \ y = 0, y = b \end{aligned} \qquad (2)$$

и начальными условиями

$$W(0, x, y) = f_1(x, y), \ W_t|_{t=0} = f_2(x, y), \qquad (3)$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $W = W(t, x, y)$; α, D — постоянные, f — некоторая нелинейная относительно W, W_t, W_x, W_y, W_{xx}, W_{xy}, W_{yy} и непрерывная по совокупности своих аргументов, периодическая по t функция; $W_{tt} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, $W_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ и т. д. производные; $f_1(x, y), f_2(x, y)$ — заданные функции, отвечающие всем необходимым требованиям. Существование и единственность решения сформулированной задачи доказано в работе [1].

Для нахождения приближенного решения задачи используем методы Фурье и усреднения. Обоснование применения этих методов к решению смешанной задачи для квазилинейных уравнений в частных производных дано в работе [2].

Согласно [1, 2] решение задачи (1), (2), (3) ищем в виде

$$W = \sum_{m,n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), умножая результат подстановки на $\sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b}\, dxdy$, интегрируя полученное равенство по области G и принимая во внимание ортогональность собственных функций, для определения $T_{mn}(t)$ получаем систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$T''_{pq} + \omega_{pq}^2 T_{pq} = \varepsilon F(T_{pq}, T'_{pq}, t), \tag{5}$$

где

$$F(T_{pq}, T'_{pq}, t) = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(t, x, y, W, W_t, W_x, W_y, W_{xx} W_{xy}, W_{yy}) \times$$
$$\times \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b}\, dxdy,$$
$$\omega_{pq}^2 = \frac{\pi^4 D}{\alpha^2} \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)^2 \quad (p, q = 1, 2, 3, \ldots),$$

начальные значения для T_{pq} следующие:

$$T_{pq}|_{t=0} = \Phi_{pq}, \ T'_{pq}|_{t=0} = \Psi_{pq}, \tag{6}$$

где $\Phi_{pq} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_1(x, y) \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b}\, dxdy$, $\Psi_{pq} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f_2(x,y) \times$ $\times \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b}\, dxdy.$

Приведем систему (5) к стандартной форме. Для этого введем медленно изменяющиеся комплексно-сопряженные функции с помощью формул

$$T_{pq} = U_{pq} e^{i\omega_{pq}t} + \bar{U}_{pq} e^{-i\omega_{pq}t}, \quad T'_{pq} = i\omega_{pq} U_{pq} e^{i\omega_{pq}t} - i\omega_{pq} \bar{U}_{pq} e^{-i\omega_{pq}t}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), получаем счетную систему дифференциальных уравнений в стандартной форме:

$$U'_{pq} = \frac{\varepsilon e^{-i\omega_{pq}t}}{2i\omega_{pq}} F(t, U_{pq}, \bar{U}_{pq}), \quad \bar{U}'_{pq} = -\frac{\varepsilon e^{i\omega_{pq}t}}{2i\omega_{pq}} F(t, U_{pq}, \bar{U}_{pq}); \tag{8}$$

начальные условия преобразуются так:

$$U_{pq}|_{t=0} = \frac{\Phi_{pq}}{2} + \frac{\Psi_{pq}}{2i\omega_{pq}}, \quad \bar{U}_{pq}|_{t=0} = \frac{\Phi_{pq}}{2} - \frac{\Psi_{pq}}{2i\omega_{pq}}. \tag{9}$$

Для получения уравнений первого приближения усредняем правые части (8) по времени:

$$\dot{\xi}_{pq} = \varepsilon \underset{t}{M} \left[\frac{e^{-i\omega_{pq}t}}{2i\omega_{pq}} F(t, \xi_{pq}, \bar{\xi}_{pq}) \right], \quad \dot{\bar{\xi}}_{pq} = -\varepsilon \underset{t}{M} \left[\frac{e^{-i\omega_{pq}t}}{2i\omega_{pq}} F(t, \xi_{pq}, \bar{\xi}_{pq}) \right]. \tag{10}$$

Начальные условия имеют прежний вид.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\nabla^4 W + \frac{p}{D} W_{tt} = \frac{6}{h^2}(1-\nu^2)\left[\frac{1}{a} W_{xx}\int\limits_0^a (W_x)^2 dx + \frac{1}{b} W_{yy}\int\limits_0^b (W_y)^2 dy\right], \quad (11)$$

описывающее колебания пластинки с учетом статической нелинейности.

Частота первого тона колебаний такой пластинки определена в работе [3].

Пользуясь предложенной выше методикой, найдем приближенное решение задачи (11), (2), (3).

Произведя соответствующие выкладки, для определения T_{pq} получаем счетную систему дифференциальных уравнений 2-го порядка вида (5)

$$T''_{pq} + \omega^2_{pq} T_{pq} = -\varepsilon L\lambda\left\{\frac{p^2}{a^4}\left[p^2\sum_s T^3_{ps} C_{sssp} + \sum_{m,n,s} T^2_{mn} T_{ps} m^2 C_{nnsq} + \right.\right.$$

$$\left. + 2p^2 \sum_{n,s} T^2_{ps} T_{pn} C_{nssq} + \sum_{\substack{m,n,k,s\\(m,n)\neq(p,s)\\(m,k)\neq(p,s)}} m^2 T_{mn} T_{nk} T_{ps} C_{nksq}\right] + \frac{q^2}{b^4}\left[q^2 \sum_r T^3_{rq} C_{rrrp} + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\substack{m,n,r\\(m,n)\neq(r,q)}} T^2_{mn} T_{rq} n^2 C_{mmrp} + 2p^2 \sum_{\substack{m,r\\m\neq r}} T^2_{rq} T_{mq} C_{mrrp} + \sum_{m,n,j,r} n^2 T_{mn} T_{jn} T_{rq} C_{mjrp}\right]\right\}, \quad (12)$$

где $\varepsilon L = \dfrac{1-\nu^2}{\rho}$; $\lambda = \dfrac{6\pi^2 D}{h^2}$; $C_{mnpq} = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\limits_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{q\pi x}{a}dx$;

L — постоянная, имеющая соответствующую размерность; ε — малый параметр.

Остальные C определяются аналогично.

С помощью замены переменных (7) преобразуем систему (12) к стандартной форме:

$$U'_{pq}(t) = \varepsilon\frac{2i\lambda L}{\rho\omega_{pq}} e^{-i\omega_{pq}t} F_{pq}(t), \quad \bar U'_{pq}(t) = -\varepsilon\frac{2i\lambda L}{\rho\omega_{pq}} e^{i\omega_{pq}t} F_{pq}(t), \quad (13)$$

где

$$F_{pq}(t) = \frac{p^2}{a^4}\left[p^2\sum_s (U_{ps}e^{i\omega_{ps}t} + \bar U_{ps}e^{-i\omega_{ps}t})^3 C_{sssq} + \right.$$

$$+ \sum_{mns}(U_{mn}e^{i\omega_{mn}t} + \bar U_{mn}e^{-i\omega_{mn}t})^2 (U_{ps}e^{i\omega_{ps}t} + \bar U_{ps}e^{-i\omega_{ps}t}) m^2 C_{nnsq} +$$

$$+ 2p^2 \sum_{\substack{n,s\\n\neq s}} (U_{ps}e^{i\omega_{ps}t} + \bar U_{ps}e^{-i\omega_{ps}t})^2 (U_{pn}e^{i\omega_{pn}t} + \bar U_{pn}e^{-i\omega_{pn}t}) C_{nssq} +$$

$$+ \sum_{\substack{mnks\\n\neq k\\(m,n)\neq(p,s)\\(m,k)\neq(p,s)}} m^2 (U_{mn}e^{i\omega_{mn}t} + \bar U_{mn}e^{-i\omega_{mn}t})(U_{mk}e^{i\omega_{mk}t} + \bar U_{mk}e^{-i\omega_{mk}t}) \times$$

$$\left. \times (U_{ps}e^{i\omega_{ps}t} + \bar U_{ps}e^{-i\omega_{ps}t}) C_{nksq}\right] +$$

$$+\frac{q^2}{b^4}\left[q^2\sum_r (U_{rq}e^{i\omega_{rq}t}+\overline{U}_{rq}e^{-i\omega_{rq}t})^3 C_{rrrp}+\right.$$

$$+\sum_{\substack{mnr\\(m,n)\neq(r,q)}} n^2(U_{mn}e^{i\omega_{mn}t}+\overline{U}_{mn}e^{-i\omega_{mn}t})^2(U_{rq}e^{i\omega_{rq}t}+\overline{U}_{rq}e^{-i\omega_{rq}t})\times$$

$$\times C_{mnrp}+2q^2\sum_{\substack{mr\\m\neq r}}(U_{rq}e^{i\omega_{rq}t}+\overline{U}_{rq}e^{-i\omega_{rq}t})^2\times$$

$$\times(U_{mq}e^{i\omega_{mq}t}+\overline{U}_{mq}e^{-i\omega_{mq}t})\,C_{mrrp}+\sum_{\substack{m\neq j;mnjr\\(m,n)\neq(r,q)\\(j,n)\neq(r,q)}} n^2(U_{mn}e^{i\omega_{mn}t}+$$

$$\left.+\overline{U}_{mn}e^{-i\omega_{mn}t})(U_{jn}e^{i\omega_{jn}t}+\overline{U}_{jn}e^{-i\omega_{jn}t})(U_{rq}e^{i\omega_{rq}t}+\overline{U}_{rq}e^{-i\omega_{rq}t})\,C_{mjrp}\right].$$

Усредняя правые части (13) по времени, получаем

$$\xi'_{pq}=\varepsilon\frac{\lambda Li}{4\rho\omega_{pq}}\xi_{pq}\frac{p^2}{a^4}\left[9p^2\xi_{pq}\overline{\xi}_{pq}+4\sum_{mn}m^2\xi_{mn}\overline{\xi}_{mn}+8p^2\sum_s\xi_{ps}\overline{\xi}_{ps}\right]+$$

$$+\frac{q^2}{b^4}\left[9q^2\xi_{pq}\overline{\xi}_{pq}+4\sum_{mn}n^2\xi_{mn}\overline{\xi}_{mn}+8q^2\sum_r\xi_{qr}\overline{\xi}_{qr}\right],$$

$$\overline{\xi}'_{pq}=-\varepsilon\frac{\lambda Li}{4p\omega_{pq}}\overline{\xi}_{pq}\frac{p^2}{a^4}\left[9p^2\xi_{pq}\overline{\xi}_{pq}+4\sum_{m,n}m^2\xi_{mn}\overline{\xi}_{mn}+8p^2\sum_s\xi_{ps}\overline{\xi}_{ps}\right]+$$

$$+\frac{q^2}{b^4}\left|9p^2\xi_{pq}\overline{\xi}_{pq}+4\sum_{mn}n^2\xi_{mn}\overline{\xi}_{mn}+8q^2\sum_r\xi_{qr}\overline{\xi}_{qr}\right]; \tag{14}$$

начальные условия имеют вид

$$\xi_{pq}(0)=\frac{\Phi_{pq}}{2}-\frac{i}{2\omega_{pq}}\Psi_{pq},\ \ \overline{\xi}_{pq}(0)=\frac{\Phi_{pq}}{2}+\frac{i}{2\omega_{pq}}\Psi_{pq}. \tag{15}$$

Решая систему (14), получаем

$$\xi_{pq}(t)\cdot\overline{\xi}_{pq}(t)=\xi_{pq}(0)\cdot\overline{\xi}_{pq}(0)\quad(pq\geqslant 1). \tag{16}$$

Учитывая (15), (7), (16), находим $\xi_{pq}(t)$, $\overline{\xi}_{pq}(t)$ и

$$T_{pq}(t)=\Phi_{pq}\cos(A_{pq}+\omega_{pq})\,t+\frac{\Psi_{pq}}{\omega_{pq}}\sin(A_{pq}+\omega_{pq})\,t. \tag{17}$$

Тогда решение задачи запишется следующим образом:

$$W=\sum_{p,q}\left[\Phi_{pq}\cos(A_{pq}+\omega_{pq})\,t+\frac{\Psi_{pq}}{\omega_{pq}}\sin(A_{pq}+\omega_{pq})\,t\right]\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{q\pi y}{b},$$

где

$$A_{pq}=\frac{3\pi^2D(1-\nu^2)}{2\rho h^2}\left\{\frac{p^2}{a^4}\left[9p^2B_{pq}+4\sum_{mn}m^2B_{mn}+8p^2\sum_s B_{ps}\right]+\right.$$

$$
+ \frac{q^2}{b^4}\left[9q^2B_{pq} + 4\sum_{mn} n^2B_{mn} + 8q^2\sum_{r} B_{qr}\right]\Bigg\},
$$

$$
B_{pq} = \Phi_{pq}^2 + \frac{\Psi_{pq}^2}{\omega_{pq}^2} \quad (p, q = 1, 2, 3, \ldots).
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарев П. А. Применение асимптотических методов нелинейной механики для исследования колебаний пластин. Автореферат канд. дис., К., 1975. 12 с.
2. Митропольский Ю. А., Остапов О. Г. О применении метода усреднения к исследованию смешанной задачи для одного класса квазилинейных уравнений в частных производных.— Мат. физика. Вып. 16, К., «Наук. думка», 1974, с. 137—147.
3. Бондарь Н. Г. Нелинейные автономные задачи механики упругих систем. К., «Будівельник», 1971. 142 с.

Черниговский филиал
Киевского политехнического института

Поступила в редакцию
1.IV.1977 г.