УДК 519.21

Н. С. Братийчук

О резольвенте обрывающегося процесса с независимыми приращениями

Пусть $\xi(t)$, $t \geqslant 0$,— однородный процесс с независимыми приращениями, траектории которого предполагаются непрерывными справа. Кумулянта такого процесса имеет вид

$$k(s) = \ln Me^{-is(\xi(1)-\xi(0))} = -ias - \frac{b}{2}s^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-isx} - 1 + \frac{isx}{1+x^2}\right)\Pi(dx), \tag{1}$$

где $b > 0$.

Введем функцию $k_1(s) = k(is)$, и в дальнейшем будем предполагать выполненным условие:

а) существует $s_+ > 0$ такое, что функция $k_1(s)$ определена в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} s \leqslant s_+$ и $k_1(s_+) > 0$.

При этих предположениях уравнение $k_1(s) - \lambda = 0$ при достаточно малых λ всегда имеет корень $\rho_\lambda > 0$. В дальнейшем будем считать, что λ выбрано именно таким.

1. Рассмотрим лемму о факторизации.

Лемма 1. *Для функции $k(s) - \lambda$ имеет место следующее представление:*

$$k(s) - \lambda = k_+(s, \lambda)\, g_-(s, \lambda), \quad 0 \leqslant \operatorname{Im} s \leqslant s_+, \tag{2}$$

где $k_+(s, \lambda) = (is - 1)(is + \rho_\lambda)\, g_+(s, \lambda)$, *функции* $g_\pm(s, \lambda)$, *отличные от нуля, соответственно непрерывные в полуплоскостях* $\operatorname{Im} s \geqslant 0$ *и* $\operatorname{Im} s \leqslant s_+$ *и аналитические внутри их. Кроме того,* $g_+(\infty, \lambda) = \frac{b}{2}$, $g_-(\infty, \lambda) = 1$. *Представление (2) единственно.*

Доказательство. Так как при вещественных s $\operatorname{Re}(\lambda - k(s)) > 0$ и $\operatorname{Re}\frac{1}{(1 - is)(is + \rho_\lambda)} \geqslant 0$, то можем записать

$$\nu_+ = \operatorname*{Ind}_{\operatorname{Im} s = 0} \frac{\lambda - k(s)}{(1 - is)(is + \rho_\lambda)} = 0, \quad \nu_- = \operatorname*{Ind}_{\operatorname{Im} s = s_+} \frac{\lambda - k(s)}{(1 - is)(is + \rho_\lambda)} = 0. \tag{3}$$

Равенства (3) позволяют записать каноническую факторизацию функции $\frac{2}{b}\frac{k(s)-\lambda}{(is-1)(is+\rho_\lambda)}$ в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} s \leqslant s_+$ (см. [1]):

$$\frac{2}{b}\frac{k(s)-\lambda}{(is-1)(is+\rho_\lambda)} = \tilde{g}_+(s,\lambda)\,\tilde{g}_-(s,\lambda),\ \ 0 \leqslant \operatorname{Im} s \leqslant s_+. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что (4) эквивалентно (2) с $g_+(s,\lambda) = \frac{b}{2}\tilde{g}_+(s,\lambda)$ и $g_-(s,\lambda) = \tilde{g}_-(s,\lambda)$.

Единственность представления (2) доказывается точно таким же способом, как и единственность канонической факторизации в работе [1].

2. Построим резольвенту процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось. Пусть $\xi^0(t)$, $t \in [0,\zeta]$, — процесс, получаемый из $\xi(t)$ обрывом в момент времени $\zeta = \inf\{t : \xi(t) \leqslant 0\}$. Известно, что $\xi^0(t)$ — однородный марковский процесс. Обозначим через $\mathbf{R}_\lambda^0$ резольвенту процесса $\xi^0(t)$, т. е. оператор вида

$$\mathbf{R}_\lambda^0 f(x) = M_x\int_0^\zeta e^{-\lambda t} f(\xi(t))\,dt,\ \ \lambda > 0,\ \ x > 0, \tag{5}$$

где $f(x)$ — ограниченная измеримая функция.

Здесь и далее M_x и P_x обозначают соответственно условное математическое ожидание и условную вероятность при условии $\xi(0) = x$, а M и P — то же самое при условии $\xi(0) = 0$.

Теорема. *Для резольвенты обрывающегося процесса* $\xi^0(t)$, $t \in [0,\zeta]$, *имеет место следующее представление*:

$$\mathbf{R}_\lambda^0 f(x) = R_\lambda(x)\int_0^\infty e^{-\rho_\lambda y} G_-^{-1} f(y)\,dy - \int_0^x R_\lambda(x-y)\,G_-^{-1} f(y)\,dy \quad (x \geqslant 0),$$

где $R_\lambda(x) = \frac{g_-(0,\lambda)\,\rho_\lambda}{\lambda}\int_0^x e^{\rho_\lambda(x-y)}\,dF_\lambda(y)$, ρ_λ — *корень уравнения* $k(is)-\lambda=0$, $F_\lambda(x) = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{-\inf_{s\leqslant t}\{\xi(s) < x\}\,dt$; G_-^{-1} — *оператор, задаваемый соотношениями*

$$G_-^{-1} f(x) = f(x) + \int_{-\infty}^0 g_-(t,\lambda)\,f(x-t)\,dt,\ \ \frac{1}{g_-(s,\lambda)} = 1 + \int_{-\infty}^0 e^{ist} g_-(t,\lambda)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $\xi(t)$ — обобщенный пуассоновский процесс со сносом с кумулянтой

$$k(s) = \ln Me^{-is(\xi(1)-\xi(0))} = -ias + c\int_{-\infty}^\infty (e^{-isx}-1)\,dF(x),\ \ c > 0,\ \ a > 0.$$

Пусть $\mathbf{R}_\lambda^0 f(x) = g(x)$, тогда при $x > 0$ имеет место соотношение

$$g(x) = M_x\int_0^\tau e^{-\lambda t} f(\xi(t))\,dt + M_x e^{-\lambda\tau} g(\xi(t)), \tag{6}$$

где τ — любой марковский момент такой, что $P_x\{\tau < \zeta\} = 1$ при $x > 0$.

В нашем случае этому условию удовлетворяет момент первого скачка процесса $\xi(t)$, $\tau=\inf\{t:\xi(t)\neq\xi(t-0)\}$. Тогда формулу (6) можно переписать в виде

$$g(x)=M\int_0^{\tau}e^{-\lambda t}f(x+at)\,dt+Me^{-\lambda\tau}g(x+a\tau+\xi),\quad x\geqslant 0,\tag{7}$$

где ξ — величина скачка процесса $\xi(t)$. Так как τ и ξ независимы и $g(x)=0$ при $x<0$, то, используя лемму 1 и (7), можно получить

$$\int_0^{\infty}e^{isx}\mathbf{R}_{\lambda}^{0}f(x)\,dx=\frac{\widetilde{\varphi}(i\rho_{\lambda})-\widetilde{\varphi}(s)}{k_{+}(s,\lambda)},\tag{8}$$

где $\widetilde{\varphi}(s)=\int\limits_0^{\infty}e^{isx}G_{-}^{-1}f(x)\,dx.$

Справедливость формулы (8) в общем случае доказывается точно так же, как и аналогичный факт в работе [2].

Далее, в [3] установлен следующий результат: если θ_{λ} — не зависящая от процесса $\xi(t)$ положительная, показательно распределенная случайная величина с параметром $\lambda>0$, то

$$\frac{\lambda}{\lambda-k(s)}=Me^{-is\xi_{\lambda}^{-}}Me^{-is\xi_{\lambda}^{+}},\tag{9}$$

где $\xi_{\lambda}^{+}=\sup\limits_{t\leqslant\theta_{\lambda}}\xi(t)$, $\quad\xi_{\lambda}^{-}=\inf\limits_{t\leqslant\theta_{\lambda}}\xi(t)$. Так как, с другой стороны,

$$\frac{\lambda}{\lambda-k(s)}=-\frac{\lambda(is+\rho_{\lambda})}{k_{+}(s,\lambda)}\cdot\frac{1}{g_{-}(s,\lambda)(is+\rho_{\lambda})},\quad 0\leqslant\operatorname{Im}s\leqslant s_{+},\tag{10}$$

и функции $\dfrac{\lambda(is+\rho_{\lambda})}{k_{+}(s,\lambda)}$, $\dfrac{1}{g_{-}(s,\lambda)\,(is+\rho_{\lambda})}$ — аналитические соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im}s>0$ и $\operatorname{Im}s<0$, то из (9) и (10) заключаем следующее:

$$Me^{-is\xi_{\lambda}^{-}}=-c\frac{\lambda(is+\rho_{\lambda})}{k_{+}(s,\lambda)},\quad\operatorname{Im}s\geqslant 0,$$

$$Me^{-is\xi_{\lambda}^{+}}=\frac{1}{c}\frac{1}{g_{-}(s,\lambda)(is+\rho_{\lambda})},\quad\operatorname{Im}s\leqslant 0.$$

Полагая $s=0$, из второго равенства получаем $c=\dfrac{1}{\rho_{\lambda}g_{-}(0,\lambda)}$. Следовательно,

$$Me^{-is\xi_{\lambda}^{-}}=-\frac{\lambda(is+\rho_{\lambda})}{g_{-}(0,\lambda)\,k_{+}(s,\lambda)\,\rho_{\lambda}}.\tag{11}$$

Запишем функцию $\dfrac{1}{k_{+}(s,\lambda)}$ в виде

$$\frac{1}{k_{+}(s,\lambda)}=\frac{\lambda(is+\rho_{\lambda})}{g_{-}(0,\lambda)\,k_{+}(s,\lambda)\,\rho_{\lambda}}\,\frac{g_{-}(0,\lambda)\,\rho_{\lambda}}{\lambda(is+\rho_{\lambda})}.\tag{12}$$

Так как функции $\dfrac{1}{k_+(s,\lambda)}$ и $\dfrac{1}{is+\rho_\lambda}$ допускают аналитическое продолжение в область $\operatorname{Im} s > \rho_\lambda$, то справедливы соотношения

$$\frac{g_-(0,\lambda)\,\rho_\lambda}{\lambda(is+\rho_\lambda)} = -\frac{g_-(0,\lambda)\,\rho_\lambda}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{isx}e^{\rho_\lambda x}dx,\ \operatorname{Im} s > \rho_\lambda,$$

$$\frac{\lambda(is+\rho_\lambda)}{\rho_\lambda g_-(0,\lambda)\,k_+(s,\lambda)} = Me^{-is\xi_\lambda^-} = \int\limits_0^\infty e^{isx}dF_\lambda(x),\ \operatorname{Im} s > \rho_\lambda, \tag{13}$$

где $F_\lambda(x) = \lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}P\{-\inf\limits_{s\in[0,t]}\xi(s) < x\}\,dt$.

Из (12) и (13) следует

$$\frac{1}{k_+(s,\lambda)} = \frac{g_-(0,\lambda)\,\rho_\lambda}{\lambda}\int\limits_0^\infty e^{isx}\int\limits_0^x e^{\rho_\lambda(x-y)}dF_\lambda(y)\,dx,\quad \operatorname{Im} s > \rho_\lambda. \tag{14}$$

Если обозначить $R_\lambda(x) = \dfrac{g_-(0,\lambda)\,\rho_\lambda}{\lambda}\displaystyle\int\limits_0^x e^{\rho_\lambda(x-y)}dF_\lambda(y)$, то (14) перепишется следующим образом:

$$\frac{1}{k_+(s,\lambda)} = \int\limits_0^\infty e^{isx}R_\lambda(x)\,dx. \tag{15}$$

Формулы (8) и (15) завершают доказательство теоремы.

Замечание. Обозначение G_-^{-1} оправдано тем, что этот оператор является обратным к оператору G_-, задаваемым соотношениями

$$G_-f(x) = f(x) + \int\limits_{-\infty}^0 \tilde{g}_-(t,\lambda)\,f(x-t)\,dt,\quad g_-(s,\lambda) = 1 + \int\limits_{-\infty}^0 e^{isx}\tilde{g}_-(x,\lambda)\,dx.$$

Отметим некоторые свойства функции $R_\lambda(x)$.

Лемма 2.

$$\int\limits_0^\infty e^{isx}R_\lambda(x)\,dx = \frac{1}{k_+(s,\lambda)},\quad \operatorname{Im} s > \rho_\lambda.$$

Лемма 3. *Функция*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} R_\lambda(x), & x \geqslant 0,\\ 0, & x < 0,\end{cases}$$

удовлетворяет уравнению

$$A\tilde{u}(x) - \lambda\tilde{u}(x) = 0,\ x > 0,$$

где A — характеристический оператор процесса $\xi(t)$.

При доказательстве необходимо воспользоваться тем, что лемма 2 позволяет записать оператор $A - \lambda I$ в виде

$$(A-\lambda I)\,f(x) = G_-K_+f(x),\ x > 0,$$

где G_- и K_+ определяются своими символами $g_-(s,\lambda)$ и $k_+(s,\lambda)$. В дальнейшем пользуемся тем, что G_- обратим, а K_+ — полулокальный (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.— УМН, 1958, **13**, № 5, с. 3—120.
2. Супрун В. Н. Задача о разорении и резольвента обрывающегося процесса с независимыми приращениями.— УМЖ, 1976, **28**, № 1, с. 53—60.
3. Гусак Д. В., Королюк В. С. О совместном распределении процесса со стационарными приращениями и его максимума.— Теория вероятностей и ее применения, 1969, **14**, № 3, с. 421—430.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
28.VII. 1976 г.