УДК 517.917

Г. А. Лось

Об устойчивости, асимптотической и экспоненциальной устойчивости линейной дифференциальной системы

Результаты фундаментальных исследований в области теории устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений, многочисленные библиографические данные по этим вопросам содержатся в работах [1—4].

Решению задачи устойчивости методами, не связанными с теорией характеристических чисел, посвящены, например, работы [5, 6].

В данной статье продолжены исследования, изложенные в [7, 8].

Получены новые достаточные условия устойчивости тривиального решения линейной дифференциальной системы с переменными коэффициентами. Метод исследований оказался применимым и к периодическим системам.

В виде примера для уравнения Хилла (и, в частности, для уравнения Матье) получен критерий устойчивости тривиального решения, позволяющий строить зоны устойчивости.

Теорема 1. *Пусть дана система дифференциальных уравнений*

$$Y' = P(t)Y \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной, ограниченной на $[t_0, +\infty)$ $n\times n$*-матрицей* $P(t)$, *для которой существуют матрицы* $A(t) = \mathrm{diag}(A_1(t), A_2(t), \ldots, A_n(t))$ $(A_i(t) \neq A_j(t),\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *и* $\Phi(t)$ $[\det\Phi(t) \neq 0]$ *такие, что* $A\Phi = \Phi P$. *Построим вспомогательную систему*

$$\overline{Y}' = [P(t) - \Phi^{-1}(t)\Phi'(t)]\,\overline{Y}, \tag{2}$$

фундаментальную матрицу которой обозначим через $\overline{\overline{Y}}(t)$. *Тогда тривиальное решение системы дифференциальных уравнений* (1)

а) *устойчиво, если решение* $\overline{\overline{Y}}(t)$ *системы* (2) *ограничено на* $[t_0, +\infty)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \det \overline{\overline{Y}}(t) \neq 0$ *и выполняется неравенство* $\sup\limits_{t\geqslant t_0} \int\limits_{t_0}^{t} \| \Phi'(\tau)\Phi^{-1}(\tau) \| d\tau < \infty$;

б) *экспоненциально устойчиво, если решение системы* (2) *экспоненциально устойчиво и для всех* $t \geqslant t_0$ $\| \Phi'(t)\Phi^{-1}(t) \| \leqslant M$, *где* M — *некоторое положительное число, причем* $\lambda > M$ (*величина* λ *взята из оценки* $\operatorname{Re} \int\limits_{\tau}^{t} A_i(\tau_1)\, d\tau_1 \leqslant -\lambda(t-\tau)$, *определяющей экспоненциальную устойчивость решений системы* (2));

в) *асимптотически устойчиво, если асимптотически устойчиво решение системы* (2) *и для всех* $t \geqslant t_0$ $\| \Phi'(t)\Phi^{-1}(t) \| \leqslant Mt^{-\mu}$, *где* $\mu > 1$, $M > 0$.

Замечание. В случае аналитической матрицы $P(t)$ можно доказать, что из существования для $P(t)$ матрицы $A(t)$ с разделенными на $[t_0, +\infty)$ диагональными элементами следует существование матрицы $\Phi(t)$, удовлетворяющей условиям $\det \Phi(t) \neq 0$, $A\Phi = \Phi P$, так что в этом случае требование существования $\Phi(t)$ в формулировке теоремы было бы излишним.

Доказательство. Систему дифференциальных уравнений (1) запишем в виде

$$\frac{dY}{dt} = (P - \Phi^{-1}\Phi')\, Y + \Phi^{-1}\Phi' Y. \tag{3}$$

Общее решение $\overline{Y}(t)$ и фундаментальная матрица $\overline{\overline{Y}}(t)$ системы (2) представляются соответственно выражениями:

$$\Phi(t)\, \overline{Y} = \exp \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau C, \quad \overline{\overline{Y}} = \Phi^{-1}(t) \exp \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Определяя фундаментальную матрицу $\widehat{Y}$ системы (3) в виде матричного ряда

$$\widehat{Y} = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i, \;\; Y_i(t_0) = 0 \;\; (i > 0), \;\; Y_0 = \overline{\overline{Y}}(t), \tag{5}$$

приходим к рекуррентной системе дифференциальных уравнений

$$Y_n' = (P - \Phi^{-1}\Phi')\, Y_n + \Phi^{-1}\Phi' Y_{n-1}, \tag{6}$$

из которой находим

$$\widehat{Y} = \overline{\overline{Y}}(t) \left[\overline{\overline{Y}}^{-1}(t_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \rho^{-1}(\tau)\, \varphi(\tau)\, \rho(\tau)\, d\tau \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_{l-1}} \rho^{-1}(\tau_l)\, \varphi(\tau_l)\, \rho(\tau_l)\, d\tau_l \right], \tag{7}$$

$\tau_{-1} = t$, $\tau_0 = \tau$, где $\rho(\tau) = \exp \int\limits_{t_0}^{t} A(\tau_1)\, d\tau_1$, $\varphi(\tau) = \Phi'(\tau)\Phi^{-1}(\tau)$.

Из равенства (7) и условий а)—в) теоремы видно, что дальнейшее доказательство элементарно, и поэтому его опускаем

Рассмотренный здесь метод может быть применен и в случае наличия сливающихся в бесконечном количестве точек собственных значений матрицы $P(t)$. Этот вопрос рассмотрим на примере системы (1) при $n = 2$. $\Phi(t)$ возьмем в виде

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{21} \\ \varphi_{12} & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_{12} = \frac{P_{21}}{A_2 - P_{11}}, \quad \varphi_{21} = \frac{P_{12}}{A_1 - P_{22}},$$

где A_1 и A_2 — собственные значения матрицы $P(t) = [P_{ij}(t)]_1^2$. Если A_1 и A_2 сливаются в некоторых точках, то в этих точках $\det \Phi(t) = 0$. Поэтому вторая формула в (4) неприменима.

Пусть, например, $\varphi_{12} \neq 0$ при $t \geqslant t_0$. В этом случае для построения решений вспомогательной системы используем только лишь φ_{12}. Для этого из общего решения (4) системы (2), где $\overline{Y} = \operatorname{colon}(\overline{y}_1, \overline{y}_2)$, определяем $\overline{y}_2$ через $\overline{y}_1$ и, подставив $\overline{y}_2$ в (2), найдем $\overline{y}_1$. Исходную систему (1) запишем в виде

$$y_1' = \left(P_{11} - \frac{\varphi_{12}'}{\varphi_{12}}\right) y_1 + P_{12} y_2 + \frac{\varphi_{12}'}{\varphi_{12}} y_1, \quad y_2' = P_{21} y_1 + P_{22} y_2. \tag{8}$$

Если ее решение искать с помощью рядов $y_1 = \sum_{i=0}^{\infty} y_{i1}$, $y_2 = \sum_{i=0}^{\infty} y_{i2}$, $y_{01} = \overline{y}_1$, $y_{02} = \overline{y}_2$, то для определения y_{i2} и y_{i1} $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ получим рекуррентные соотношения вида (6), из которых найдем, что

$$\begin{gathered} y_{n1} = \frac{1}{\varphi_{12}(t)} \int_{t_0}^{t} \frac{\mu(\tau)}{\varphi_{12}(\tau)} F(t, \tau)\, d\tau \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-2}} \frac{\mu(\tau_{n-1})}{\varphi_{12}(\tau_{n-1})} F(\tau_{n-2}, \tau_{n-1}) \times \\ \times y_{01}(\tau_{n-1})\, d\tau_{n-1}, \\ y_{n2} = \int_{t_0}^{t} \frac{\mu(\tau)}{\varphi_{12}(\tau)} S(t, \tau)\, d\tau \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-2}} \frac{\mu(\tau_{n-1})}{\varphi_{12}(\tau_{n-1})} F(\tau_{n-2}, \tau_{n-1})\, y_{01}(\tau_{n-1})\, d\tau_{n-1} \\ (n = 2, 3, \ldots), \quad \tau_0 = \tau, \end{gathered} \tag{9}$$

где $\mu(\tau) = \varphi_{12}'(\tau) \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} \operatorname{Sp} P(\tau_1)\, d\tau_1\right)$; $F(t, \tau) = [Y_{11}^{(1)}(t)\, Y_{12}^{(2)}(\tau) - Y_{11}^{(2)}(t) \times Y_{12}^{(1)}(\tau)]\, \varphi_{12}(t)$; $S(t, \tau) = Y_{12}^{(1)}(t)\, Y_{12}^{(2)}(\tau) - Y_{12}^{(2)}(t)\, Y_{12}^{(1)}(\tau)$, причем $Y_{ij}^{(s)}$ $(i, j, s = 1, 2)$ — элементы фундаментальной матрицы (6) при $i = 1$, индекс s обозначает здесь номер решения, j — номер неизвестного, i — номер приближения.

Из (9) легко получить оценки для $|y_1|$ и $|y_2|$, предполагая последовательно решения $|y_1|$, $|y_2|$ ограниченными, экспоненциально устойчивыми, асимптотически устойчивыми, из которых вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Тривиальное решение системы дифференциальных уравнений* (1) *при* $n = 2$ (*если матрица ее коэффициентов имеет сливающиеся собственные значения, но хотя бы одна из величин* φ_{12}, φ_{21} *не обращается в нуль при* $t \geqslant t_0$) *для случая* $\varphi_{12} \neq 0$

а) *устойчиво, если ограничены* $|\overline{y}_1|$, $|\overline{y}_2|$, $\int_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} P(\tau)\, d\tau > -\infty$, $\sup\limits_{t \geqslant t_0} \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\varphi_{12}'}{\varphi_{12}} \right| d\tau < \infty$;

б) *экспоненциально устойчиво, если* $|y_{01}| \leqslant \exp(-\lambda(t - t_0))$, $\lambda > 0$, $\left|\left\{ \frac{\mu(\tau)}{\varphi_{12}(\tau)} F(t, \tau) \right|, |\mu(\tau) S(t, \tau)| \right\} \leqslant \alpha e^{-\mu(t-\tau)}$, $\mu > 0$, $\alpha - \mu < 0$;

в) *асимптотически устойчиво, если* $\{|F(t, \tau)|, |S(t, \tau)|\} \leqslant N\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\lambda}$, $\lambda > 0$, $|y_{01}(\tau)\, \varphi_{12}(\tau)| \leqslant M\tau^{-\mu}$, $\mu > 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} t^{-\lambda} \left[\exp \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\mu(\tau)}{\varphi_{12}(\tau)} \right| d\tau - 1 \right] = 0.$

Метод рассуждений, изложенный выше, применим к исследованию устойчивости решений системы (1) как в случае непериодической функции $P(t)$, так и в случае периодической.

Например, рассмотрим уравнение

$$y'' + P(t)\,y = 0, \quad P(t) > 0. \tag{10}$$

Переписав его в виде

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -P(t)\,y_1 \tag{11}$$

и взяв $\varphi_{12} = iu'(t)$, $\varphi_{21} = -\dfrac{i}{u'(t)}$, получим

$$Y_{11}^{(1)} = -\frac{1}{u'(t)}\sin u(t), \quad Y_{12}^{(1)} = -\cos u(t), \quad Y_{11}^{(2)} = \frac{1}{u'(t)}\cos u(t),$$
$$Y_{12}^{(2)} = -\sin u(t),$$

где $u(t) = \int\limits_0^t \sqrt{P(\tau)}\,d\tau$. Так как здесь $\operatorname{Sp} P(\tau) \equiv 0$, то речь можно вести только лишь об устойчивости.

На основании условия а) теоремы 2 тривиальное решение предложенного уравнения устойчиво, если $\int\limits_0^t |P'(\tau)/P(\tau)|\,d\tau$ при всех $t \geqslant 0$ ограничен.

Если $P(t) = P(t + \pi)$, то матрицант вспомогательной системы имеет вид:

$$\overline{\overline{Y}}_{11} = \frac{u'(0)}{u'(t)}\cos u(t), \quad \overline{\overline{Y}}_{21} = -u'(0)\sin u(t), \quad \overline{\overline{Y}}_{12} = \frac{1}{u'(t)}\sin u(t),$$
$$Y_{22} = \cos u(t).$$

Тогда $\operatorname{Sp} Y(\pi) \leqslant R + \left(1 + \dfrac{1}{u'(\pi)}\right)L$, $\operatorname{Sp} Y(\pi) \geqslant R - \left(1 + \dfrac{1}{u'(\pi)}\right)L$, где $R = \left(1 + \dfrac{u'(0)}{u'(\pi)}\right)\cos u(\pi)$, $L = \operatorname{ch}\int\limits_0^\pi \left|\dfrac{u''(t)}{u'(t)}\right| dt - 1$. Так как $\int\limits_0^\pi |u''(t)/u'(t)|\,dt = \ln(m/n)$, где i_s, j_s $(s = 1, 2, \ldots, k)$ — соответственно точки максимумов и минимумов функции $P(t)$ на $[0, \pi)$, то $L = \dfrac{m^2 + n^2 - mn}{2mn}$, $m = \prod\limits_{s=1}^{k} P(i_s)$, $n = \prod\limits_{s=1}^{k} P(j_s)$.

Из известного критерия устойчивости решений системы (11) $-2 \leqslant \operatorname{Sp} Y(\pi) \leqslant 2$ (см. [4]) вытекает, что тривиальное решение уравнения Хилла (10) устойчиво, если выполняются неравенства

$$R + \left(1 + \frac{1}{u'(\pi)}\right)L \leqslant 2, \quad R - \left(1 + \frac{1}{u'(\pi)}\right)L \geqslant -2. \tag{12}$$

В случае уравнения Матье, т. е. при $P(t) = a + b\cos 2t$, неравенства (12) имеют вид:

$$T + S \leqslant 1, \quad T - S \geqslant -1, \tag{13}$$

где $T = \cos\left\{2\sqrt{a+b}\,E\left(\sqrt{\dfrac{2b}{a+b}}\right)\right\}$, $S = \sqrt{1 + \dfrac{1}{a+b}}\,\dfrac{b^2}{a^2 - b^2}$, $E(\alpha)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Критерий (13) дает зоны устойчивости при $b < a$, близкие к точным, и позволяет строить их для больших a и b, далеко выходящих за пределы существующих таблиц типа Айнса и Стретта [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, Изд-во АН БССР, 1963. 240 с.
2. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. К., «Наук. думка», 1968. 218 с.
3. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1964. 477 с.
4. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972. 718 с.
5. Павлюк А. І. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. К., Киев. гос. ун-т, 1970. 208 с.
6. Гаврилов Н. И. Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Высшая школа», 1962. 312 с.
7. Лось Г. А. Достаточные условия устойчивости решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.— УМЖ, 1972, **24**, № 2, с. 246—250.
8. Лось Г. А. Решение и устойчивость системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами.— УМЖ, 1973, **25**, № 3, с. 384—393.
9. Tables Relating to Mathicu Funktions. National Bureau of Standards, Columbia University Press, 1951, p. 151—160.

Хмельницкий технологический институт
бытового обслуживания

Поступила в редакцию 3.II. 1975 г.,
после переработки — 16.VIII. 1977 г.