УДК 517.521.8

В. И. Мельник

Тауберова теорема для методов суммирования Валирона

(J)-метод суммирования, связанный с целой функцией $\psi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\exp(-\varphi(k)+ + kx)$, определяется следующим образом [1, с. 107]. Будем говорить, что последовательность s_k $(k=0, 1, \ldots)$ суммируется к числу s (J)-методом, если для всех x существует преобразование

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k e^{-\varphi(k)+kx} \tag{1}$$

и если $\lim_{x\to+\infty} g(x)/\psi(x)=s$. Наиболее известным (J)-методом суммирования является метод Бореля. Валирон [1, с. 279] изучал тауберовы теоремы (J)-метода, определяемого функцией $\varphi(k)$ с достаточно правильным поведением. В данной работе для некоторого класса (J)-методов усиливается теорема Валирона. Для этой цели применяется общий метод Винера—Питта [2, гл. IV]. Напомним некоторые элементы этого метода.

Определение [2, с. 7—8]. Будем говорить, что функция $s(u)$ принадлежит классу T, если 1) функция $s(u)$ ограничена и измерима на каждом конечном интервале; 2) вещественные функции $\delta(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, $\theta(u, \varepsilon)$, $\xi(u, \varepsilon)$, $u_0(\varepsilon)$ могут быть определены для всех u и $\varepsilon>0$ так, что $0< <\delta(\varepsilon)\leqslant 1$, $0<\mu(\varepsilon)\leqslant 1$, $\mu(\varepsilon)$ убывает, $|\xi-u|\leqslant\delta$, и для всех $u\geqslant u_0(\varepsilon)$ из неравенства $|v-\xi|\leqslant\delta$ следует $\operatorname{Re}[e^{i\theta}s(v)]\geqslant\mu|s(u)|-\varepsilon$.

Пусть функция $s(y)$, $-\infty<y<+\infty$, преобразуется в функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $-\infty<x<+\infty$, с помощью формул

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(y)\,k_1(x, y)\,dy,\quad f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(y)\,k_2(x-y)\,dy, \tag{2}$$

где предполагается, что оба интеграла абсолютно сходятся для всех x. Ядро $k_2(x-y)$ называется каноническим, ядро $k_1(x, y)$ будет приближаться к каноническому в смысле следующего определения.

Определение. Будем говорить, что ядро $k_1(x, y)$ приближается к ядру $k_2(x-y)$ в отрезке $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |k_1(x, y)| e^{\sigma y} dy < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |k_2(x-y)| e^{\sigma y} dy < \infty \text{ при } \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$$

и выражение

$$\eta(x) = \sup_{\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma(y-x)} |k_1(x, y) - k_2(x-y)| dy$$

ограничено и $\lim\limits_{x \to +\infty} \eta(x) = 0$.

Теорема (см. [2]). *Пусть даны числа $\sigma_2 > \sigma_1 \geqslant 0$ и ядро $k_2(y)$. Пусть ядро $k_1(x, y)$ приближается к $k_2(x-y)$ в отрезке $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ и для $\omega = \sigma + it$*

$$K(-i\omega) \neq 0 \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1), \text{ где } K(-i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega y} k_2(y)\, dy. \tag{3}$$

Предположим также, что функция $s(y)$ принадлежит классу T, $s(y) = 0$ при $y < 0$, $s(y) = O(e^{\sigma y})$ при $y > 0$ и любом $\sigma > \sigma_1$, а также, что $f_1(x)$, определенное формулой (2), ограничено. Тогда $S \leqslant CF + \varepsilon$, где $S = \overline{\lim\limits_{y \to +\infty}} |s(y)|$, $F = \overline{\lim\limits_{x \to +\infty}} |f_1(x)|$, а константа C зависит только от $\delta(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ и ядра $k_2(y)$.

Для применения этих методов к преобразованию (1) его нужно привести к канонической форме. Введем функцию $s(v) = s_k$ при $k \leqslant v < k+1$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

Теорема. *Пусть функция $\varphi(v)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно, причем $\varphi(v)$, $\varphi'(v)$ положительны и возрастают к $+\infty$, $h(v) = \varphi''(v)$ положительна и убывает и*

а) $v^{-2+\beta} < h(v) < v^{-\beta}$ $(v > v_0)$ *для некоторого* $\beta > 0$;

б) $1 + vh'(v)/2h(v) \to c^*$, $c^* > 0$ $(v \to +\infty)$*.

Предположим также, что функция $s(v)$, где $v\sqrt{h(v)} = u$, по переменной и принадлежит классу T, что $\ln|s(v)| = O(v\sqrt{h(v)})$ при $v \to +\infty$, а также что $f(x) = g(x)/\psi(x)$ ограничено. Тогда $S \leqslant CF + \varepsilon$, где $S = \overline{\lim\limits_{k \to +\infty}} |S_k|$, $F = \overline{\lim\limits_{x \to +\infty}} |f(x)|$, а константа C зависит только от $\delta(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$ и функции $\varphi(v)$. В частности, если последовательность s_k суммируется к 0, то она сходится к 0.

Для доказательства теоремы проведем ряд вычислений, некоторые из них выделены в виде лемм.

Лемма 1. *В условиях теоремы*

$$h(v_2)/h(v_1) \leqslant (v_2/v_1)^c \text{ для } v_1 < v_2 \text{ — больших.}$$

Действительно, по условию б) теоремы

$$|\ln h(v_1) - \ln h(v_2)| = \left| \int_{v_1}^{v_2} \frac{h'(v)}{h(v)} dv \right| = \left| \int_{v_1}^{v_2} \frac{2(c^*-1) + o(1)}{v} dv \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \ln(v_2/v_1).$$

* Через c, c_1, $c(\delta)$ и т. п. будем обозначать положительные числа, которые зависят только от явно указанных аргументов. Аналогично через C, C_1, $C(\delta)$ и т. д. будем обозначать достаточно большие положительные числа. Одна и та же буква в разных формулах обозначает, вообще говоря, разные числа.

Лемма 2. *При каждом достаточно большом x через n_x обозначим число v, удовлетворяющее уравнению $\varphi'(v) = x$. Тогда в условиях теоремы*

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{h(n_x)}}\, e^{-\varphi(n_x)+xn_x}(1+o(1)) \quad (x \to +\infty)$$

и

$$-\varphi(n_x) + xn_x \to +\infty \quad (x \to +\infty).$$

Начнем с доказательства последнего утверждения леммы. Учитывая равенство $\varphi'(n_x) = x$, а также лемму 1 и условие а) теоремы, найдем, что

$$-\varphi(n_x) + xn_x = c + \int_c^{n_x} (\varphi'(n_x) - \varphi'(v))\, dv = c + \int_c^{n_x} dv \int_v^{n_x} h(u)\, du \geqslant$$

$$\geqslant c + ch(n_x) \int_{n_x/2}^{n_x} (n_x - v)\, dv \geqslant c + cn_x^2 h(n_x) \geqslant c + cn_x^{\beta} \to +\infty \quad (x \to +\infty).$$

Для доказательства первого утверждения леммы 2 необходимы еще такие вычисления:

$$G(x, v) \equiv \varphi(n_x) - xn_x - \varphi(v) + xv = \int_v^{n_x} (\varphi'(v) - \varphi'(n_x))\, dv =$$

$$= -\int_v^{n_x} dv \int_v^{n_x} h(u)\, du = -h(n_x)(n_x - v)^2 (1 + o(1))/2 \quad (x \to +\infty)$$

при $n_x/v \to 1$ $(x \to +\infty)$. Выберем $\gamma = 1 - \beta/4$, то при $|v - n_x| > n_x^{\gamma}$, $v < 2n_x$ из аналогичных вычислений получим

$$G(x, v) = -ch(n_x)(v - n_x)^2 \leqslant -cn_x^{\beta/2},$$

а при $v \geqslant 2n_x$

$$G(x, v) \leqslant -ch(v)(v - n_x)^2 \leqslant -cv^{\beta}.$$

Используя все это, найдем

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\varphi(k) + kx) = \exp(-\varphi(n_x) + xn_x)\Bigg\{ \sum_{|k-n_x| \leqslant n_x^{\gamma}} \exp G(x, k) +$$

$$+ o(1)\Bigg\} = \exp(-\varphi(n_x) + xn_x)\left(\int_{n_x - n_x^{\gamma}}^{n_x + n_x^{\gamma}} \exp(-h(n_x)(v - n_x)^2 \times \right.$$

$$\left. \times (1 + o(1))/2)\, dv + o(1) \right).$$

Делая в последнем из интегралов замену переменных $\sqrt{h(n_x)}\,(v - n_x)/\sqrt{2} = t$, приведем его к виду

$$\sqrt{\frac{2}{h(n_x)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2(1+o(1))} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{h(n_x)}}\,(1 + o(1)) \quad (x \to +\infty),$$

что и завершает доказательство леммы 2.

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Не уменьшая общности, будем считать, что $s(v) = 0$ на достаточно большом конечном интервале. Выпишем последовательно ряд преобразований с близкими ядрами так, чтобы от данного преобразования $f(x) = g(x)/\psi(x)$ перейти к преобразованию с каноническим ядром:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k e^{-\varphi(k)+kx}/\psi(x),\ \ f_3(x)=\sqrt{\frac{h(n_x)}{2\pi}}\sum_{|k-n_x|\leqslant n_x^{\gamma}}s_k e^{G(x,k)},$$

$$f_4(x)=\sqrt{\frac{h(n_x)}{2\pi}}\int_{n_x-n_x^{\gamma}}^{n_x+n_x^{\gamma}}s(v)\exp\left(-h(n_x)(n_x-v)^2/2\right)dv,$$

$$f_5(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,c^*}\int_{n_x-n_x^{\gamma}}^{n_x+n_x^{\gamma}}s(v)\exp\left(-h(n_x)(n_x-v)^2/2\right)\sqrt{h(v)}\left(1+\frac{vh'(v)}{2h(v)}\right)dv,$$

где c^* — константа из условия б) теоремы. В последнем интеграле проведем замену переменных $v\sqrt{h(v)}=u$ и $n_x\sqrt{h(n_x)}=z$. Поскольку

$$v-n_x=\int_v^{n_x}dv=\int_u^z\frac{du}{\sqrt{h(v)}\,(1+vh'(v)/2h(v))}\sim\frac{z-u}{c^*\sqrt{h(n_x)}},$$

то ряд написанных выше преобразований продолжают формулы

$$f_6(z)=\frac{1}{c^*\sqrt{2\pi}}\int_{z-n_x^{\beta/4}}^{z+n_x^{\beta/4}}s(v(u))\exp\left(-(z-u)^2/2c^{*2}\right)du,$$

$$f_2(z)=\frac{1}{c^*\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}s(v(u))\exp\left(-(z-u)^2/2c^{*2}\right)du.$$

Последнее из написанных преобразований имеет канонический вид, первое из преобразований после подстановок $v\sqrt{h(v)}=u,\ n_x\sqrt{h(n_x)}=z$ можно представить в виде $f(x)=f_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(v(u))\,k_1(z,u)\,du$. Теперь к преобразованиям $f_1(z)$ и $f_2(z)$ применяем теорему Питта. Убедимся, что

$$\eta(z)=\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\sigma(u-z)}\,|k_1(z,u)-k_2(z-u)|\,du\to 0\quad(z\to+\infty),$$

где $k_i(z,u)$ обозначает ядро преобразования $f_i(z)$. Так как все ядра $k_i(z,u)$ имеют порядок $\exp(-c(z-u)^2)$, то наличие множителя $e^{\sigma(u-z)}$ в формуле для $\eta(z)$ не вносит существенных трудностей в оценки. От ядра $k_1(z,u)$ к ядру $k_2(z-u)$ необходимо прийти, используя весь ряд написанных выше преобразований $f_i(x)$. Соответствующие вычисления весьма громоздки, но совершенно элементарны. Не приводя их, отметим только конечный результат вычислений: ядро $k_1(z,u)$ приближается к ядру $k_2(z-u)$ на любом отрезке $[0,\sigma_2]$, $\sigma_2>0$ (в смысле данного выше определения). Условие (3) теоремы Питта проверяется легко, так как

$$K(-i\omega)=\frac{1}{c^*\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega u-u^2/2c^{*2}}du=e^{-c^{*2}\omega^2/2}\neq 0$$

на всей плоскости. Остальные условия теоремы Питта включены в условия нашей теоремы и, следовательно, доказательство завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
2. Pitt H. R. Tauberian theorems. London, Oxford University Press, 1958. 174 p.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию
1.VI. 1976 г.