УДК 517.53

Ю. И. Мельник

О представлении регулярных функций рядами по функциям Миттаг — Леффлера в замкнутом круге

1. В данной работе обобщены результаты статьи [1] на случай, когда речь идет о разложениях по функциям Миттаг—Леффлера.

Всюду в дальнейшем оценку вида $O(\cdot)$ будем считать равномерной по всем не входящим в нее параметрам, которые встречаются в данном выражении.

2. Теорема 1. *Пусть*

$$l_\rho(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{\rho^{\rho^{-1}} z}{d_n^{\rho^{-1}}}\right)^n\right), \tag{1}$$

где $\rho > 0$, $d_1 = \frac{1}{e}$, $d_n = \frac{n(n+1)}{2}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. *Тогда*

$$\ln|l_\rho(re^{i\varphi})| = r^\rho + O(\ln r) \quad (|\rho r^\rho - d_n| \geqslant 1), \tag{2}$$

$$|l_\rho(re^{i\varphi})| = O(e^{r^\rho}), \tag{3}$$

если μ_k — *корень* $l_\rho(z)$, *то*

$$\ln|l'_\rho(\mu_k)| = |\mu_k|^\rho + \left(\frac{\rho}{2} - 1\right)\ln|\mu_k| + O(1). \tag{4}$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 работы [1]. Имеем

$$\ln|l_\rho(re^{i\varphi})| = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1 - \left(\frac{\rho^{\rho^{-1}} r}{d_n^{\rho^{-1}}}\right)^n e^{in\varphi}\right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left|1 - \left(\frac{R}{d_n}\right)^{\rho^{-1}n} e^{in\varphi}\right|, \qquad R = \rho r^\rho.$$

Оценивая последнюю сумму точно так же, как в теореме 1 работы [1], получаем оценки (2), (3). После этого оценка (4) получается тем же способом, что и (5) в работе [1].

3. Пусть $\pi_q(z)$ — произвольный многочлен степени q $(q \geqslant 0)$ с нулями, различными между собой и отличающимися от всех нулей функции $l_\rho(z)$, и пусть

$$L(z) = l_\rho(z)\,\pi_q(z). \tag{5}$$

Нули функции $L(z)$ обозначим через λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

Следуя А. Ф. Леонтьеву (см. [2]), произвольной функции $f(z)$, регулярной в замкнутом круге $\overline{K} \overset{\mathrm{df}}{=} \{z : |z| \leqslant 1\}$, сопоставим ряд

$$f(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(f) \frac{E_\rho(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)}, \tag{6}$$

где $L(z)$ — целая функция, определенная по формуле (5), $E_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}$ — функция Миттаг — Леффлера,

$$\omega_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} f(\zeta)\, \psi_k(\zeta)\, d\zeta, \tag{7}$$

$\psi_k(\zeta)$ — функция, ассоциированная с $L(z)/(z-\lambda_k)$ по функции $E_\rho(z)$, т. е. если $\frac{L(z)}{z-\lambda_k} = \sum_{n=0}^{\infty} l_{kn} z^n$, то $\psi_k(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_{kn}\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)}{\zeta^{n+1}}$, $R > 1$ выбрано так, что функции $f(\zeta)$, $\psi_k(\zeta)$ регулярны на окружности $|\zeta| = R$.

Лемма. *Ряд* (6) *сходится к* $f(z)$ *абсолютно в открытом круге* $K \overset{\mathrm{df}}{=} \{z : |z| < 1\}$ *и равномерно внутри* K.

Доказательство. Оценим число $\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right) l_{kn}$. Имеем

$$\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right) l_{kn} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)}{2\pi i} \int_C \frac{L(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta-\lambda_k)},$$

где C — произвольный замкнутый контур, охватывающий начало координат. Используя оценку (3), формулу Стирлинга и оценивая последнее выражение точно так же, как оценивались числа b_{nk} в работе [1] (только теперь берем в качестве C окружность $|\zeta| = (n/\rho)^{\rho^{-1}}$), легко получаем

$$\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right) l_{kn} = O\left(n^{\frac{q-1}{\rho}+\frac{1}{2}} \ln n\right). \tag{8}$$

Из (8) следует, что $\max\limits_{|\zeta|=R} |\psi_k(\zeta)| = O(1)$, откуда

$$|\omega_k(f)| \leqslant \mathrm{const} \max_{|\zeta|=R} |f(\zeta)|. \tag{9}$$

Из оценки (см. [3, гл. III, § 2])

$$E_\rho(u) = O\left(e^{|u|^\rho}\right) \tag{10}$$

и оценок (9), (4) следует, что ряд (6) абсолютно сходится в K и равномерно внутри K. Осталось доказать, что сумма ряда (6) (обозначим ее через $F(z)$) совпадает с $f(z)$ в K. Пусть сначала $f(z) = E_\rho(\lambda z)$ $(\lambda \neq \lambda_k)$. Функции $E_\rho(\lambda z)$ соответствует ряд (см. [2])

$$E_\rho(\lambda z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L(\lambda)\, E_\rho(\lambda_k z)}{(\lambda-\lambda_k)\, L'(\lambda_k)} \equiv F(z). \tag{11}$$

Рассмотрим мероморфную функцию $E_\rho(\lambda z)/L(\lambda)$ (как функцию переменного λ). Из оценок (10), (2) следует, что

$$M(r) \to 0 \quad (r \to \infty,\ |\rho r^\rho - d_n| \geqslant 1),\quad M(r) = \max_{|\lambda|=r} \left| \frac{E_\rho(\lambda z)}{L(\lambda)} \right|.$$

Поэтому (см. [4, с. 125])

$$E_\rho(\lambda z) = \lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<r} \frac{L(\lambda)\, E_\rho(\lambda_k z)}{(\lambda - \lambda_k)\, L'(\lambda_k)}.$$

$$|\rho r^\rho - d_n| \geqslant 1$$

Утверждение леммы в рассматриваемом случае следует из (11) и последнего соотношения. Отсюда и из линейности функционалов $\omega_k(f)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ следует справедливость леммы для квазиполиномов вида

$$f_N(z) = \sum_{m=1}^{N} a_m^{(N)} E_\rho(\delta_m^{(N)} z). \tag{12}$$

Чтобы завершить доказательство леммы, воспользуемся полнотой системы функций $\{E_\rho(\lambda z)\}$ во всей плоскости. Пусть $f_N(z)$ — последовательность квазиполиномов вида (12) такая, что

$$\max_{|z|=R} |f(z) - f_N(z)| \underset{N\to\infty}{\to} 0. \tag{13}$$

Используя (10), (4), (9), (13), получаем

$$|f(z) - F(z)| \leqslant |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - F(z)| \leqslant |f(z) - f_N(z)| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k(f - f_N)| \left| \frac{E_\rho(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)} \right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad (z \in K),$$

откуда следует справедливость леммы в общем случае.

З а м е ч а н и е 1. В случае $\rho = 1$ утверждение леммы автоматически следует из теоремы 1 и одной общей теоремы А. Ф. Леонтьева (см. [1]).

4. В этом пункте обобщаем теорему 3 работы [1].

Т е о р е м а 2. *Пусть $L(z)$ определяется по формуле* (5), $q = 2 + [\rho/2]$*, $\beta = 1 + [\rho/2] - \rho/2$, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *совокупность нулей* $L(z)$ *и* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ — *регулярная в открытом круге K функция, для которой выполняется условие*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\, n^{1+\beta/\rho} \ln n < \infty. \tag{14}$$

Тогда в замкнутом круге $\overline{K}$ функцию $f(z)$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по функциям Миттаг—Леффлера вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\omega}_k(f)\, \frac{E_\rho(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)}. \tag{15}$$

Коэффициенты $\tilde{\omega}_k(f)$ ряда (15) *определяются по формулам*

$$\tilde{\omega}_k(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right) l_{kn},\quad l_{kn} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{L(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta - \lambda_k)}.$$

---

* Здесь и далее через $[x]$ обозначается целая часть числа x.

Доказательство теоремы опускается, поскольку оно дословное повторение рассуждений, с помощью которых установлена теорема 3 работы [1], с использованием леммы и оценок (4), (8), (10).

Теорема 2 естественно обобщается на функции многих комплексных переменных.

Теорема 3. *Пусть* $L(z)$ *определяется по формуле* (5), $q = 2 + [\rho/2]$, $\beta = 1 + [\rho/2] - \rho/2$ *и*

$$f(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{n_1, \ldots, n_m = 0}^{\infty} f_{n_1, \ldots, n_m} z_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot z_m^{n_m}$$

— регулярная функция m $(m \geqslant 1)$ *переменных* $z_1, \ldots, z_m$, *для которой выполняется условие*

$$\sum_{n_1, \ldots, n_m = 0}^{\infty} | f_{n_1, \ldots, n_m} | \prod_{j=1}^{m} n_j^{1+\beta/\rho} \ln n_j < \infty.$$

Тогда $f(z_1, \ldots, z_m)$ *можно разложить в* $\overline{K}^m \overset{\mathrm{df}}{=} \{z_1, \ldots, z_m : |z_j| \leqslant 1 \quad (j = 1, 2, \ldots m)\}$ *в абсолютно и равномерно сходящийся ряд*

$$f(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{k_1, \ldots, k_m = 1}^{\infty} \tilde{\omega}_{k_1, \ldots, k_m}(f) \frac{E_\rho(\lambda_{k_1} z_1) \cdot \ldots \cdot E_\rho(\lambda_{k_m} z_m)}{L'(\lambda_{k_1}) \cdot \ldots \cdot L'(\lambda_{k_m})},$$

где

$$\tilde{\omega}_{k_1, \ldots, k_m}(f) = \sum_{n_1, \ldots, n_m = 0}^{\infty} f_{n_1, \ldots, n_m} \prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(\frac{n_j}{\rho} + 1\right) l_{k_j n_j}.$$

Доказательство теоремы опускается, ибо оно легко получается по схеме доказательства теоремы 2.

Замечание 2. а) Разложение, построенное в теореме 2, не единственное. б) Требование (14) выполняется, например, если функция $f^{([\beta/\rho]+2)}(z)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\varepsilon > \beta/\rho - [\beta/\rho]$ на границе круга $\overline{K}$.

Эти факты доказываются точно так же, как в случае $\rho = 1$ (см. [1]).

5. Здесь обобщаем (и одновременно усиливаем) теорему 2 работы [1].

Положим $\pi_q(z) = A(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_q)$, где $q \geqslant 0$, $A = \mathrm{const}$, z_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ — корни функции $l_\rho(z)$, и пусть

$$L(z) = l_\rho(z)/\pi_q(z). \tag{16}$$

Корни функции $L(z)$ обозначим через λ_k, $k = 1, 2, \ldots$. Предположим, что функции $\psi_k(\zeta)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ассоциированные с $L(z)/(z - \lambda_k)$ по функции $E_\rho(z)$, непрерывны на окружности $|\zeta| = 1$. Тогда произвольной регулярной в K и непрерывной в $\overline{K}$ функции $f(z)$ можно поставить в соответствие ряд (6), только в (7) контур интегрирования нужно заменить на окружность $|\zeta| = 1$.

Теорема 4. *Пусть* $L(z)$ *определяется по формуле* (16), $q = \frac{3}{2}\rho - 1 + \alpha$, $\alpha > 0$, $m = q + 1 + [\rho/2]$, $\beta = 1 + [\rho/2] - \rho/2$ *и* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ *— произвольная регулярная в открытом круге* K *функция, для которой выполняются условие* (14) *и условие*

$$f^{(j)} \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^j L(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{17}$$

(*ниже будет показано, что в условиях теоремы ряды* (17) *абсолютно сходятся*). *Тогда функции* $\psi_k(\zeta)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *будут непрерывны на окружности* $|\zeta| = 1$ *и ряд* (6), *соответствующий функции* $f(z)$, *будет сходиться к* $f(z)$ *абсолютно и равномерно в замкнутом круге* $\overline{K}$.

Доказательство. Установим абсолютную и равномерную сходимость ряда (6) в $\overline{K}$, ибо легко показать (поступая по схеме доказательства леммы), что в этом случае его сумма будет совпадать с $f(z)$.

Используя тождество (см. [2])

$$\frac{1}{\zeta - \lambda_k} = -\sum_{j=0}^{m} \frac{\zeta^j}{\lambda_k^{j+1}} + \frac{1}{\zeta - \lambda_k}\left(\frac{\zeta}{\lambda_k}\right)^{m+1},$$

находим, что

$$\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right) l_{kn} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}{2\pi i} \int\limits_C \frac{L(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta - \lambda_k)} = -\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\lambda_k^{j+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}{2\pi i} \times$$

$$\times \int\limits_C \frac{\zeta^j L(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}} + \frac{1}{\lambda_k^{m+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\zeta^{m+1} L(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta - \lambda_k)}, \tag{18}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий начало координат. Положим

$$L_{jn} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\zeta^j L(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \quad L_{mn}^{(k)} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right)}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\zeta^{m+1} L(\zeta)\, d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta - \lambda_k)}.$$

Поступая точно так же, как при выводе (8), легко получаем

$$\Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right) l_{kn} = O\left(n^{-(1+\alpha/\rho)} \ln n\right), \quad L_{jn} = O\left(n^{-(1+\alpha/\rho)+(j+1)/\rho}\right), \tag{19}$$

$$L_{mn}^{(k)} = O\left(n^{1+\beta/\rho} \ln n\right). \tag{20}$$

Отметим, что из оценок (19) и условия (14) вытекает непрерывность функций $\psi_k(\xi)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ на окружности $|\zeta| = 1$ и абсолютная сходимость рядов (17). Далее из (7), (18), учитывая (8), (19), (20), (17), находим

$$\omega_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \psi_k(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \zeta^n \psi_k(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Gamma\left(\frac{n}{\rho} + 1\right) l_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(-\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\lambda_k^{j+1}} L_{jn} + \frac{1}{\lambda_k^{m+1}} L_{mn}^{(k)}\right) =$$

$$= -\sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda_k^{j+1}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n L_{jn} + \frac{1}{\lambda_k^{m+1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n L_{mn}^{(k)} - \sum_{n=0}^{\infty} f_n L_{mn}\right) = O\left(\frac{1}{|\lambda_k|^{m+1}}\right). \tag{21}$$

Из (21), (4), (10) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k:|\rho\rho^{-1}\lambda_k|=d_n^{\rho-1}} \left| \omega_k(f) \frac{E_\rho(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)} \right| \leqslant \text{const} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{d_n^{\frac{m+1}{\rho}}} \times$$

$$\times \frac{1}{d_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho}-\frac{q}{\rho}}} \leqslant \text{const} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\beta/\rho}} < \infty.$$

Этим теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. а) Разложения, построенные в теореме 4, единственны. Это доказывается точно так же, как в случае $\rho = 1$ (см. [1]). б) Если в условиях теоремы требование (17) не выполняется, то функцию $f(z)$ можно представить в $\overline{K}$ в виде

$$f(z) = \pi_{m-1}(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(\hat{f}) \frac{E_\rho(\lambda_k z)}{L'(\lambda_k)},$$

где $\pi_{m-1}(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{m-1} z^{m-1}$, числа $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ — решение линейной системы уравнений

$$f^{(j)} = \sum_{k=0}^{m-1} A_k L_{jk} \quad (j = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{22}$$

(легко видеть, что матрица системы (22) треугольная, так что система имеет единственное решение), $\hat{f}(z) = f(z) - \pi_{m-1}(z)$. Доказательство этого сводится к непосредственной проверке выполнения условий (17) для функции $\hat{f}(z)$.

6. Заслуживает внимания частный случай теоремы 4, когда $\rho = 1$. В этом случае $E_1(z) = e^z$, функция $l_1(z)$ совпадает с функцией $l(z)$ из работы [1]. Положим $\alpha = 1/2$, так что $q = 1$, $\beta = 1/2$, $m = 2$, и пусть $\pi_q(z) = ez - 1$, $L(z) = l_1(z)/(ez - 1)$. Тогда теорема 4 дает следующий результат.

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *корни целой функции* $L(z) \overset{\text{df}}{=} l_1(z)/(ez - 1)$, *где* $l_1(z)$ *определяется по формуле* (1). *Пусть* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ — *произвольная регулярная в круге* $K = \{z : |z| < 1\}$ *функция, для которой выполняются условия*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n| n^{3/2} \ln n < \infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n L_{0n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_1 L_{1n} = 0,$$

где $L_{0n} = L^{(n)}(0)$, $L_{1n} = (zL(z))^{(n)}|_{z=0}$. *Тогда* $f(z)$ *можно представить в* $\overline{K}$ *абсолютно и равномерно сходящимся рядом Дирихле*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(f) \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}.$$

Эта теорема усиливает теорему 2 работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутом круге.— Мат. сб., 1975, 97, № 4, с. 493—502.
2. Леонтьев А. Ф. Представление функций обобщенными рядами Дирихле.— УМН, 1969, **24, № 2**, с. 97—164.
3. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966. 671 с.
4. Евграфов М. А. Аналитические функции, М., «Наука», 1965. 423 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
1.VII. 1976 г.