УДК 517.948.34

О. Д. Нуржанов

О периодических решениях интегро-дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$Lx \equiv p(t)\frac{dx(t)}{dt} + a(t)x(t) + \int_t^{t+\tau} h(t, s)x(s)\,ds = f(t), \tag{1}$$

где $p(t)$, $a(t)$, $f(t)$ и $h(t, s)$ — периодические по t, s с периодом 2π функции; τ — некоторая постоянная. Обозначим через $C^r(\Gamma_1)$ и $H^r(\Gamma_1)$ классы функций, периодических по t с периодом 2π и имеющих непрерывные и соответственно обобщенные производные до порядка r включительно. Пространство $C^r(\Gamma_1)$ можно сделать банаховым, вводя в него нормы

$$|f|_r = \max_{0\leqslant\rho\leqslant r} \| D^\rho f(t) \|,$$

где $f(t) \in C^r(\Gamma_1)$, $D^\rho f(t)$ — любая производная функции $f(t)$ порядка ρ; пространство $H^r(\Gamma_1)$ превращается в гильбертово введением в него скалярного произведения

$$(f, g)_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} fK^r g\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(1 - \frac{d^2}{dt^2}\right)^r g\,dt, \qquad f, g \in H^r(\Gamma_1). \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение (1), предполагая, что $p(t)$, $a(t)$ и $h(t, s) \in C^r(\Gamma_1)$, $f(t) \in H^r(\Gamma_1)$.

Нас интересует вопрос применимости метода Галеркина для отыскания периодических периода 2π решений интегро-дифференциального уравнения (1). Для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) и более общего, этот вопрос выяснялся в работе [1]. Применение метода Галеркина к некоторым классам интегро-дифференциальных уравнений проводилось в работах [2—5]. В данной заметке, решая вопрос обоснования метода Галеркина для отыскания периодических решений интегро-дифференциального уравнения (1), следуем схеме, использованной в работах [6—8] для обоснования метода Галеркина отыскания инвариантных торов. Так как ищем периодическое решение периода 2π интегро-дифференциального уравнения (1), без ограничения общности, считаем, что $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$.

1. Согласно методу Галеркина N-е приближение к периодическому решению интегро-дифференциального уравнения (1) ищем в виде тригонометрического полинома $W_N(t) = \sum\limits_{k=-N}^{N} W_k e^{ikt}$, коэффициенты которого определяем из соотношений

$$(LW_N, e^{-ikt})_0 = (f, e^{-ikt})_0 \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N). \tag{3}$$

Система (3) эквивалентна уравнению

$$S_N L W_N(t) = S_N f(t), \tag{4}$$

где S_N — оператор сглаживания функции $F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{ikt}$, действующий по формуле $S_N F(t) = \sum_{|k| \leqslant N} F_k e^{ikt}$.

Обозначим через $\overline{W}_N$ и $\overline{f}_N$ векторы коэффициентов соответственно функций $W_N(t)$ и $S_N f(t)$. Тогда система (3) примет вид

$$\mathfrak{A}_N \overline{W}_N = \overline{f}_N, \tag{5}$$

где $\mathfrak{A}_N$ — матрица левой части (3).

Для разрешимости уравнения (5) достаточно, чтобы оператор L был положительно определенным, т. е. чтобы удовлетворялось неравенство $(Lx, x)_0 \geqslant \gamma_0 \|x\|_0^2$ для любой функции $x(t) \in H^0(\Gamma_1)$ и некоторой положительной постоянной γ_0.

2. Приведем достаточное условие положительной определенности оператора L. Оператор L состоит из дифференциального оператора $L_0 x \equiv \equiv p(t) \frac{dx}{dt} + a(t) x$ и интегрального члена $L_1 x \equiv \int_t^{t+\tau} h(t, s) x(s)\, ds$. Условия положительной определенности оператора L_0 хорошо известны и состоят в выполнении неравенства

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} \left[a(t) - \frac{1}{2} \frac{dp(t)}{dt} \right] = \alpha_0 > 0. \tag{6}$$

Для нахождения условий положительной определенности оператора $L = L_0 + L_1$ произведем оценку L_1.

Пользуясь известным неравенством Буняковского — Шварца, получаем

$$|(x, L_1 x)_0| = \left| \left(x, \int_t^{t+\tau} h(t, s) x(s)\, ds \right)_0 \right| \leqslant \|x\|_0 \left\| \int_t^{t+\tau} h(t, s) x(s)\, ds \right\|_0, \tag{7}$$

где

$$\|x\|_0 = \sqrt{(x, x)_0} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t)\, dt \right]^{1/2}. \tag{8}$$

Оценим норму $\left\| \int_t^{t+\tau} h(t, s) x(s)\, ds \right\|_0$. Так как $\tau \leqslant 2\pi$, то очевидно, что

$$\left\| \int_t^{t+\tau} h(t, s) x(s)\, ds \right\|_0 \leqslant \left\| \int_t^{t+2\pi} h(t, s) x(s)\, ds \right\|_0. \tag{9}$$

Периодичность подынтегральных функций обеспечивает справедливость соотношения

$$\int_t^{t+2\pi} h(t, s) x(s)\, ds = \int_0^{2\pi} h(t, s) x(s)\, ds$$

для любого $t \in [0, 2\pi]$. В силу этого, неравенство (9) запишем в виде

$$\left\| \int_t^{t+\tau} h(t, s) x(s)\, ds \right\|_0 \leqslant \left\| \int_0^{2\pi} h(t, s) x(s)\, ds \right\|_0. \tag{10}$$

Теперь, согласно (8), имеем

$$\left\| \int_0^{2\pi} h(t, s) x(s) ds \right\|_0^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} h(t, s) x(s) ds \right)^2 dt.$$

Отсюда, используя неравенство Буняковского — Шварца, приходим к оценке

$$\left\| \int_0^{2\pi} h(t, s) x(s) ds \right\|_0^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} h^2(t, s) ds \int_0^{2\pi} x^2(s) ds \right] dt = \| x \|_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(t, s) dsdt,$$

так что

$$\left\| \int_0^{2\pi} h(t, s) x(s) ds \right\|_0 \leqslant \| x \|_0 \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(t, s) dsdt \right]^{1/2}. \tag{11}$$

Следовательно, из (10) и (11) получаем оценку

$$\left\| \int_t^{t+\tau} h(t, s) x(s) ds \right\|_0 \leqslant l_0 \| x \|_0, \tag{12}$$

где обозначено $l_0 = \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(t, s) dsdt \right]^{1/2}$. С учетом (12) неравенство (7) принимает вид

$$| (x, L_1 x)_0 | \leqslant l_0 \| x \|_0^2. \tag{13}$$

Таким образом, неравенства (6) и (13) позволяют получить оценку

$$(Lx, x)_0 = (L_0 x, x)_0 + (L_1 x, x)_0 \geqslant (L_0 x, x)_0 - | (L_1 x, x)_0 | \geqslant [\alpha_0 - l_0] \| x \|_0^2,$$

т. е.

$$(Lx, x)_0 \geqslant \gamma_0 \| x \|_0^2, \tag{14}$$

где $\gamma_0 = \alpha_0 - l_0$.

Неравенство (14) показывает, что для положительной определенности оператора L достаточно выполнения неравенства

$$\gamma_0 = \alpha_0 - l_0 > 0. \tag{15}$$

При этом условии неравенство (14) обеспечивает существование приближений Галеркина $W_N(t)$ и дает для них оценку

$$\| W_N \|_0 \leqslant \frac{\| f \|_0}{\gamma_0}. \tag{16}$$

3. Для доказательства сходимости приближений Галеркина $W_N(t)$ оценим $\| W_N \|_1$ и $\| W_N \|_r$ при $r \geqslant 2$. С этой целью рассмотрим скалярные произведения $(Lx, x)_1$ и $(Lx, x)_r$. Найдем оценки для $(L_1 x, x)_1$ и $(L_1 x, x)_r$. На основании (2) нормы $\| x \|_1$ и $\| x \|_r$ определяются соответственно равенствами

$$\| x \|_1^2 = (x, x)_1 = (x, Kx)_0, \qquad \| x \|_r^2 = (x, x)_r,$$

где $K = 1 - \frac{d^2}{dt^2}$, $x \in H^r(\Gamma_1)$. Тогда

$$| (L_1 x, x)_1 | = | (L_1 x, Kx)_0 | \leqslant | (L_1 x, x)_0 | + \left| \left(L_1 x, \frac{d^2 x}{dt^2} \right)_0 \right|. \tag{17}$$

Рассмотрим второе слагаемое в неравенстве (17). Для него верна оценка

$$\left| \left(L_1 x, \frac{d^2 x}{dt^2} \right)_0 \right| = \left| \left(\frac{d}{dt} L_1 x, \frac{dx}{dt} \right)_0 \right| \leqslant \left\| \frac{d}{dt} L_1 x \right\|_0 \left\| \frac{dx}{dt} \right\|_0 \leqslant \left\| \frac{d}{dt} L_1 x \right\|_0 \| x \|_1, \tag{18}$$

так как $\left\| \frac{dx}{dt} \right\|_0 \leqslant \| x \|_1$. Далее, имеем

$$\left\| \frac{d}{dt} L_1 x \right\|_0 = \left\| \frac{d}{dt} \int\limits_t^{t+\tau} h(t, s)\, x(s)\, ds \right\|_0 \leqslant \| h(t, t+\tau)\, x(t+\tau) \|_0 + \| h(t, t)\, x(t) \|_0 +$$

$$+ \left\| \int\limits_t^{t+\tau} \frac{\partial h(t, s)}{\partial t} x(s)\, ds \right\|_0 \leqslant [2M + l_1] \| x \|_0, \tag{19}$$

где

$$M^2 = \max_{t \in [0, 2\pi]} [\, | h^2(t, t+\tau) |,\ | h^2(t, t) | \,], \qquad l_1^2 = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\partial h(t, s)}{\partial t} \right)^2 ds dt.$$

Учитывая (19), из неравенства (18) получаем

$$\left| \left(L_1 x, \frac{d^2 x}{dt^2} \right)_0 \right| \leqslant [2M + l_1] \| x \|_0 \| x \|_1. \tag{20}$$

Очевидно, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\| x \|_0 \| x \|_1 \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \| x \|_0^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| x \|_1^2.$$

Поэтому из (20) следует, что

$$\left| \left(L_1 x, \frac{d^2 x}{dt^2} \right)_0 \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} [2M + l_1] \| x \|_1^2 + \frac{1}{2\varepsilon} [2M + l_1] \| x \|_0^2. \tag{21}$$

Подставляя неравенства (13) и (21) в (17), находим

$$| (L_1 x, x)_1 | \leqslant \gamma_1' \| x \|_1^2 + \delta_1' \| x \|_0^2, \tag{22}$$

где $\gamma_1' = \frac{\varepsilon}{2} [2M + l_1]$, $\quad \delta_1' = l_0 + \frac{1}{2\varepsilon} [2M + l_1]$.

Рассуждая аналогично при $r \geqslant 2$, можно найти оценку

$$| (L_1 x, x)_r | \leqslant \gamma'(\varepsilon) \| x \|_r^2 + \delta'(\varepsilon) \| x \|_0^2, \tag{23}$$

где $\gamma'(\varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ — некоторые положительные постоянные, зависящие от параметра ε, причем $\gamma'(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для скалярного произведения $(L_0 x, x)_r$ справедлива оценка (см. [7, 8]):

$$(L_0 x, x)_r \geqslant \bar{\gamma} \| x \|_r^2 - \bar{\delta} \| x \|_0^2 \qquad (\bar{\gamma}, \bar{\delta} > 0) \tag{24}$$

всякий раз, когда

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} \left[a(t) + \left(r - \frac{1}{2} \right) \frac{dp(t)}{dt} \right] = \alpha > \bar{\gamma}. \tag{25}$$

Итак, принимая во внимание неравенства (23) и (24), приходим к следующей оценке:

$$(Lx, x)_r = (L_0 x, x)_r + (L_1 x, x)_r \geqslant (L_0 x, x)_r - | (L_1 x, x)_r | \geqslant$$

$$\geqslant [\bar{\gamma} - \gamma'(\varepsilon)] \| x \|_r^2 - [\bar{\delta} + \delta'(\varepsilon)] \| x \|_0^2,$$

т. е. к неравенству

$$(Lx, x)_r \geqslant \gamma \| x \|_r^2 - \delta \| x \|_0^2, \tag{26}$$

где $\gamma = \bar{\gamma} - \gamma'(\varepsilon)$, $\delta = \bar{\delta} + \delta'(\varepsilon) > 0$.

При помощи последнего неравенства для приближений Галеркина $W_N(t)$ получаем оценку

$$\| W_N \|_r \leqslant \frac{C_0}{\gamma} \| f \|_r, \tag{27}$$

где C_0 — некоторая постоянная, не зависящая от N.

4. Неравенство (27) показывает, что последовательность приближений Галеркина $W_N(t)$ ограничена в пространстве $H^r(\Gamma_1)$. По известной лемме Соболева [9] эта последовательность компактна в $H^s(\Gamma_1)$ для $s < r$, следовательно, из последовательности $W_N(t)$ можно выделить сходящуюся в $H^s(\Gamma_1)$ подпоследовательность $W_{N_j}(t)$. Предельная функция принадлежит $H^s(\Gamma_1)$ и является, согласно теореме вложения Соболева [10], функцией из $C^s(\Gamma_1)$ всякий раз, когда $r > s + \frac{1}{2}$. Легко показать, что выполнение неравенства (15) и (25) обеспечивает сходимость последовательности приближений $W_{N_j}(t)$ в $H^s(\Gamma_1)$. При выполнении неравенства (15) и (25) для $r > 2$ предельная функция $W_0(t) \in C^1(\Gamma_1)$ и является, как ясно из предельного перехода, периодическим решением исходного интегро-дифференциального уравнения (1). Резюмируя сказанное, приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Пусть для интегро-дифференциального уравнения*

$$p(t) \frac{dx(t)}{dt} + a(t) x(t) + \int_t^{t+\tau} h(t, s) x(s) ds = f(t) \tag{28}$$

выполняются условия:

1) $p(t),\ a(t),\ h(t, s) \in C^r(\Gamma_1),\ f(t) \in H^r(\Gamma_1)$;

2) *положительные постоянные*

$$\alpha_0 = \min_{t \in [0, 2\pi]} \left[a(t) - \frac{1}{2} \frac{dp(t)}{dt} \right]; \qquad l_0 = \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(t, s) \, ds dt \right]^{1/2}$$

удовлетворяют неравенству $\alpha_0 > l_0$;

3) *для некоторого целого* $r \geqslant 2$ *выполняется неравенство*

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} \left[a(t) + \left(r - \frac{1}{2} \right) \frac{dp(t)}{dt} \right] > 0.$$

Тогда интегро-дифференциальное уравнение (28) *имеет* 2π-*периодическое решение* $W = W_0(t)$, *являющееся равномерным пределом последовательности приближений Галеркина* $W_N(t)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$\| W_N - W_0 \|_s \leqslant C N^{s-r} \| f \|_{r+1} \qquad (s < r)$$

для всех N *и некоторой постоянной* C, *не зависящей от* N.

Замечание 1. Теорема остается в силе и для интегро-дифференциального уравнения вида

$$p(t) \frac{dx(t)}{dt} + a(t) x(t) + \int_0^{\theta(t)} h(t, s) x(s) ds = f(t),$$

где $\theta(t)$ — непрерывная, периодическая с периодом 2π функция, если считать в теореме l_0 равным значению

$$l_0 = \left(1 + \left[\frac{T}{2\pi}\right]\right) \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} h^2(t, s) \, ds dt \right\}^{1/2},$$

где $\left[\frac{T}{2\pi}\right]$ — целая часть числа $\frac{T}{2\pi}$, $T = \max_{t \in [0, 2\pi]} |\theta(t)|$.

Замечание 2. Для интегрального уравнения

$$a(t)\,x(t) + \int_{t}^{t+\tau} h(t, s)\,x(s)\,ds = f(t)$$

теорема остается в силе, если заменить в ней условия 2) неравенством $1 > l_0$ и определить l_0 из условия

$$l_0 = \left[\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{h(t, s)}{a(t)}\right|^2 dsdt\right]^{1/2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Урабе М. Метод Галеркина для нелинейных периодических систем.— Механика, 1966, **97**, № 3, с. 3—34.
2. Манжерон Д., Кривошеин Л. Е. Приближенное решение некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений.— Bul. Inst. Polit. Iasi, 1969, **6**, f. 1—2, p. 17—28.
3. Манжерон Д., Кривошеин Л. Е. Приближенное решение краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.— Bul. Inst. Polit. Iasi, 1960, **6**, f. 3—4, p. 21—30.
4. Кривошеин Л. Е. Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, «Илим», 1962. 184 с.
5. Бараталиев К. Б. Приближенное решение интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— В кн.: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Вып. 3, Фрунзе, Изд-во АН КиргССР, 1965, с. 69—83.
6. Friedrichs K. O. Symmetric Positive Linear Differential Equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1958, **11**, p. 333—418.
7. Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итерации и нелинейные дифференциальные уравнения.— УМН, 1968, **23**, вып. 4, с. 179—238.
8. Самойленко А. М., Парасюк И. О. О методе Галеркина в теории возмущений инвариантных торов.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 2, с. 112—115.
9. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950. 256 с.
10. Соболев С. Л. Об одной теореме функционального анализа.— Мат. сб., 1938, **4**, с. 471—497.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
2.III. 1977 г.