УДК 519.21

Б. Пирджанов

Величина перескока положительного уровня

В данной статье изучается распределение величины перескока положительного уровня решетчатого случайного блуждания. Для исследования применяем метод потенциала (см [1]).

Распределение величины перескока изучалось с использованием факторизационных тождеств для случайного блуждания, описываемого суммами независимых случайных величин [2—4], а также для процессов с независимыми приращениями [5].

Предположения относительно исходного блуждания, необходимый аппарат и обозначения, используемые в этой статье, изложены в работе [6]. Для цельности изложения сначала напомним некоторые результаты из этой работы.

1. Итак, пусть

$$\chi_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad n \geqslant 1, \qquad \chi_0 = 0, \tag{1}$$

где ξ_k — независимые одинаково распределенные решетчатые случайные величины с распределением $P\{\xi_k = m\} = p_m$, $-\infty < m < \infty$, с производящей функцией

$$p(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n p_n, \qquad |z| = 1. \tag{2}$$

Обозначим через K производящий оператор блуждания χ_n, а через $k(z)$ его символ, т. е.

$$Ku_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n u_{k-n} - u_k, \quad -\infty < k < \infty, \tag{3}$$

$$k(z) = p(z) - 1. \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполняются следующие условия:

а) $\sup\{z > 0 : k(z) < \infty\} = z_+ > 1$ и $k(z_+) > 0$;

б) $\inf\{z > 0 : k(z) < \infty\} = z_- < 1$ и $k(z_-) > 0$.

В силу выпуклости функции $k(z)$ в интервале вещественной оси (z_-, z_+) уравнение

$$k(z) = 0 \tag{5}$$

имеет два вещественных корня $z = 1$ и $z = z_0$.

Справедлива факторизация

$$k(z) = k^+(z)\, g^-(z), \qquad z_- \leqslant |z| \leqslant z_+, \tag{6}$$

где

$$k^+(z) = \left(\frac{1}{z} - 1\right)\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) g^+(z), \tag{7}$$

функции $g^{\pm}(z)$ соответственно непрерывные при $z \in \{z : |z| \leqslant z_+\}$ и $z \in \{z : |z| \geqslant z_-\}$ и аналитические внутри. Кроме того, $g^{\pm}(z) \neq 0$ в указанных областях и $g^-(\infty) = 1$.

Потенциалом решетчатого случайного блуждания на полуоси $k \geqslant 0$ называется последовательность $\{R_k, k \geqslant 0\}$, производящая функция которой $R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k$ задается соотношением

$$R(z) = \frac{1}{k^+(z)}, \qquad |z| < \min(1, z_0). \tag{8}$$

Укажем следующие его свойства:

1) $R_0 = 0, \qquad R_1 = \dfrac{1}{q_+} \neq 0$, где $q_+ = q^+(0)$;

2) потенциал удовлетворяет уравнению

$$KR_n \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_{n-k} R_k - R_n = 0, \qquad n > 0; \tag{9}$$

3) общее решение уравнения

$$Ku_n \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_{n-k} u_k - u_n = 0, \qquad n > 0, \tag{10}$$

с условием $u_n = 0$, $n \leqslant 0$, имеет вид

$$u_n = cR_n, \qquad n \geqslant 0; \tag{11}$$

4) общее решение стандартной задачи на полуоси $k>0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{k-n}u_n - u_k = \psi_k, \qquad k>0, \tag{12}$$

с условием $u_k=0$, $k\leqslant 0$, представлено в виде

$$u_k = cR_k + \sum_{n=0}^{k} R_{k-n}G_{-}^{-1}\psi_k, \qquad k>0, \tag{13}$$

где G_{-}^{-1} — оператор, задаваемый символом

$$\tilde{g}^{-}(z) = \frac{1}{g^{-}(z)} = \sum_{n=-\infty}^{0} z^n \tilde{g}_n^{-}, \tag{14}$$

2. Среди различных граничных функционалов от случайных блужданий, описываемых суммами (1) независимых одинаково распределенных случайных величин, наибольшее внимание привлекает величина перескока γ_x через уровень $x\geqslant 0$, определяемая соотношением

$$\gamma_x = \chi_{\tau_x} - x, \tag{15}$$

где $\tau_x = \inf\{t>0 : \chi_1(t) \geqslant x\}$.

Замечательным свойством функционала γ_x является то, что его производящая функция выражается через потенциал, а не через резольвенту, как это имеет место для других функционалов.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *При* $|z|=1$ *имеет место представление*

$$Mz^{\gamma_x} = q_+[Mz^{\gamma_0}-1]R_{x+1} + k^+(z)\sum_{n=x+1}^{\infty} R_n z^{n-x}, \qquad x\geqslant 0, \tag{16}$$

при этом

$$Mz^{\gamma_0} = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{q_+}(1-z)\,g^+(z) & \text{при} \quad z_0<1, \\ 1-\dfrac{1}{q_+}\left(1-\dfrac{z}{z_0}\right)g^+(z) & \text{при} \quad z_0\geqslant 1. \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы используем следующие стохастические соотношения для величины перескока:

$$\gamma_x = \gamma_{x-\xi+\zeta}, \qquad x\geqslant 0; \qquad \gamma_x = -x, \qquad x<0. \tag{18}$$

Введем производящую функцию величины первого перескока

$$u_x(z) = Mz^{\gamma_x}. \tag{19}$$

Применяя формулы условных математических ожиданий, из стохастических соотношений (18) получаем

$$u_x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n u_{x-n}(z)$$

или, иначе,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n u_{x-n}(z) - u_x(z) = 0, \qquad x\geqslant 0. \tag{20}$$

Учитывая второе равенство из (18) при $x<0$, имеем

$$u_x(z) = z^{-x} \quad \text{при} \quad x<0. \tag{21}$$

Чтобы получить задачу в стандартной форме, введем функцию

$$\widetilde{u}_x(z) = u_x(z) - z^{-x}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{22}$$

Теперь перепишем равенство (20) с учетом (22), тогда получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \widetilde{u}_{x-n}(z) - \widetilde{u}_x(z) = -z^{-x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n z^n - 1\right].$$

так как $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} p_n z^n - 1 = k(z)$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \widetilde{u}_{x-n}(z) - \widetilde{u}_x(z) = -z^{-x}k(z), \qquad x \geqslant 0. \tag{23}$$

Таким образом, получим следующую стандартную задачу:

$$K\widetilde{u}_x(z) = -z^{-x}k(z), \qquad x \geqslant 0, \tag{24}$$

при условии

$$\widetilde{u}_x(z) = 0, \qquad x < 0. \tag{25}$$

Применяя свойство 4) потенциала, получаем решение задачи (24)—(25) в виде

$$\widetilde{u}_x(z) = c_z R_{x+1} - k(z)\sum_{n=0}^{x} R_{x-n} G_{-}^{-1} z^{-n}, \qquad x \geqslant 0. \tag{26}$$

Используя (7) и свойство оператора G_{-}^{-1}, (14) имеем

$$\widetilde{u}_x(z) = c_z R_{x+1} - k^{+}(z)\sum_{n=0}^{x} R_{x-n} z^{-n}, \qquad x > 0,$$

или, иначе,

$$\widetilde{u}_x(z) = c_z R_{x+1} - k^{+}(z)\sum_{n=0}^{x} R_n z^{n-x}, \qquad x > 0. \tag{27}$$

Учитывая (19) и (22), получаем выражение для производящей функции величины перескока γ_x в виде

$$Mz^{\gamma_x} = c_z R_{x+1} - k^{+}(z)\sum_{n=0}^{x} R_n z^{n-x} + z^{-x}, \qquad x \geqslant 0. \tag{28}$$

Остается определить параметр c_z. Полагая в (28) $x = 0$, получаем $Mz^{\gamma_0} = c_z R_1 + 1$, так как $R_1 = \dfrac{1}{q_+}$, то

$$c_z = q_+[Mz^{\gamma_0} - 1]. \tag{29}$$

С другой стороны, переходя в (28) к производящим функциям по $x \geqslant 0$, получаем

$$v(\lambda, z) = \sum_{x=0}^{\infty} \lambda^x M z^{\gamma_x} = c_z \sum_{x=0}^{\infty} \lambda^x R_{x+1} -$$

$$- k^{+}(z)\sum_{x=0}^{\infty} \lambda^x \left(\sum_{n=0}^{x} R_n z^{n-x}\right) + \sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{z}\right)^x =$$

$$= c_z \frac{1}{\lambda k^{+}(\lambda)} - k^{+}(z)\frac{1}{\left(1-\dfrac{\lambda}{z}\right)k^{+}(\lambda)} + \frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{z}}, \qquad \left|\frac{\lambda}{z}\right| < 1,$$

или, иначе,

$$v(\lambda, z) = \frac{1}{k^+(\lambda)}\left[\frac{c_z}{\lambda} - \frac{z}{z-\lambda}(k^+(z) - k^+(\lambda))\right], \qquad \left|\frac{\lambda}{z}\right| < 1. \tag{30}$$

Функция $k^+(\lambda)$ имеет два нуля на вещественной оси (см. [6]): $\lambda = 1$ и $\lambda = z_0$.

Если $z_0 < 1$, тогда в (30) слева стоит функция, аналитическая в круге $|\lambda| < 1$. Поэтому множитель c_z должен компенсировать полюс левой части (30) в точке $\lambda = z_0$. Следовательно,

$$c_z = \frac{z_0 z}{z - z_0} k^+(z), \tag{31}$$

или, учитывая (7), имеем

$$c_z = (z-1)\, g^+(z). \tag{32}$$

Если же $z_0 > 1$, тогда ряд $\sum\limits_{x=0}^{\infty} \lambda^x M z^{\nu_x}$ сходится при $M\xi < 0$. Функция $v(\lambda, z)$ — аналитическая в $|\lambda| < 1$ и непрерывная в круге, т. е. $\lim\limits_{\lambda \to 1} v(\lambda, z) < \infty$. Значит, c_z должна компенсировать полюс в правой части (30) в точке $\lambda = 1$. Следовательно,

$$c_z = \frac{z k^+(z)}{z-1} \tag{33}$$

или, иначе, с учетом (7),

$$c_z = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) g^+(z). \tag{34}$$

В случае $z_0 = 1$ знаменатель в (30) имет в точке $\lambda = 1$ нуль кратности два, в то время как $\lim\limits_{\lambda \to 1} (\lambda - 1)\, v(\lambda, z) < \infty$.

Поэтому c_z должен компенсировать нуль знаменателя в точке $\lambda = 1$. Следовательно,

$$c_z = \frac{z}{z-1} k^+(z) \quad \text{или, иначе,} \quad c_z = \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) g^+(z).$$

Подставляя (31) в (30), после несложных преобразований получаем

$$v(\lambda, z) = \frac{z}{z-\lambda}\left[1 - \frac{z(\lambda - z_0)}{\lambda(z - z_0)} \frac{k^+(z)}{k^+(\lambda)}\right], \qquad \left|\frac{\lambda}{z}\right| < 1, \tag{35}$$

или, иначе, учитывая (7), имеем

$$v(\lambda, z) = \frac{z}{z-\lambda}\left[1 - \frac{1-z}{1-\lambda} \frac{g^+(z)}{g^+(\lambda)}\right], \qquad \left|\frac{\lambda}{z}\right| < 1. \tag{36}$$

Подставляя (33) в (30), получаем

$$v(\lambda, z) = \frac{z}{z-\lambda}\left[1 - \frac{z(1-\lambda)}{\lambda(1-z)} \frac{k^+(z)}{k^+(\lambda)}\right], \qquad \left|\frac{\lambda}{z}\right| < 1, \tag{37}$$

или, иначе, учитывая (7),

$$v(\lambda, z) = \frac{z}{z-\lambda}\left[1 - \frac{(z_0 - z)}{(z_0 - \lambda)} \frac{g^+(z)}{g^+(\lambda)}\right]. \tag{38}$$

Таким образом, попутно получено выражение для двойной производящей функции величины первого перескока в виде (35) — (38).

Подставляя (29) в (28), имеем

$$M z^{\nu_x} = q_+ [M z^{\nu_0} - 1] R_{x+1} - k^+(z) \sum_{n=0}^{x} R_n z^{n-x} + z^{-x}, \qquad x \geqslant 0, \tag{39}$$

так как

$$\sum_{n=0}^{x} R_n z^{n-x} = \sum_{n=0}^{x} R_n z^{n-x} + \sum_{n=x+1}^{\infty} R_n z^{n-x} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n = \frac{1}{k^+(z)},$$

то

$$Mz^{\nu_x} = q_+ [Mz^{\nu_0} - 1] R_{x+1} - z^{-x} + k^+(z) \sum_{n=x+1}^{\infty} R_n z^{n-x} + z^{-x}, \qquad x \geqslant 0. \quad (40)$$

Отсюда следует формула (16).

Объединяя (31) и (33) с (29), получаем

$$Mz^{\nu_0} = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{q_+} \dfrac{z_0 z}{z_0 - z} k^+(z) & \text{при} \quad z_0 < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{q_+} \dfrac{z}{1 - z} k^+(z) & \text{при} \quad z_0 \geqslant 1 \end{cases} \quad (41)$$

или, иначе, учитывая (7), получаем формулу (17), которой завершаем доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королюк В. С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. К., «Наук. думка», 1975. 138 с.
2. Коваленко И. Н. О предельном распределении величины первого перескока.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, 5, № 4, с. 469—472.
3. Боровков А. А. О распределении величины первого перескока.— В кн.: Труды IV Всесоюзного совещания по теории вероятности и математической статистике, Вильнюс, 1962, с. 7—21.
4. Рогозин Б. А. О распределении величины первого перескока.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, № 3, с. 498—515.
5. Гусак Д. В. О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями.— Теория вероятностей и ее применения, 1969, 14, № 1, с. 15—23.
6. Братийчук Н. С., Пирджанов Б. Потенциал и резольвента решетчатого случайного блуждания.— УМЖ, 1977, 29, № 6, с. 784—790.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
27.VI.1977 г.