УДК 517.911

В. П. Рудаков

Качественная теория в пространстве Банаха, функционалы Ляпунова — Красовского и обращение некоторых задач

Для уравнений, типа рассмотренных в работах [1 — 7], качественная теория строится в произвольном банаховом пространстве. Пусть B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$; E^1 — одномерное евклидово пространство; $J_T = [\alpha, T)$, $I_T = [\beta, T)$, $J = [\alpha, \gamma]$, $I = [\beta, \gamma]$, $I_\gamma = [\beta, \gamma)$ $(-\infty < \alpha \leqslant \beta < \gamma < T \leqslant \infty)$; C—пространство непрерывных на J_T функций $\psi(t)$ со значениями в B; $C(J)$ — банахово пространство непрерывных на J функций со значениями в B, $\|\cdot\|^J$ — его норма $(\|\psi\|^J = \|\psi(s)\|^J = \sup\limits_{s\in J} \|\psi(s)\|)$; g, g_0, g_1 — ограниченные подмножества B; $C_g = C(J \to g)$ — множество непрерывных на J функций со значениями в g; B_R — открытая сфера в пространстве B радиуса R с центром в нулевом элементе, $\overline{B}_R$—замыкание B_R; $\Omega = I_T \times C$, $\Omega_\gamma = I_\gamma \times C(J)$, $\Xi_\gamma = I_\gamma \times C(J) \times C(J)$; запись «$\psi(\cdot)$» после «$t$» означает сужение функции $\psi \in C$ заданием ее на отрезке $[\alpha, t]$ $(\beta \leqslant t < T)$; $F(t, \psi(\cdot))$ — оператор, определенный на Ω и имеющий значения в B; $\{F\}_{\gamma, g}$ — множество значений оператора F на множестве $\omega_{\gamma, g} = I \times C_g$.

Рассмотрим основную начальную задачу: найти решение уравнения

$$\dot{x}(t) = F(t, x(\cdot)), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$(t_0, \varphi) \in \Omega. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *оператор F непрерывен по t на I_T при любой фиксированной функции $\psi(s) \in C$;*

2) *оператор F удовлетворяет локальному условию Липшица по аргументу ψ, т. е. для каждых γ и g можно указать такое число $L(\gamma, g) > 0$, что для $\forall (t, \psi)$, $(t, \tilde{\psi}) \in \omega_{\gamma, g}$ выполняется неравенство*

$$\| F(t, \psi(\cdot)) - F(t, \tilde{\psi}(\cdot)) \| \leqslant L \| \psi - \tilde{\psi} \|^{[\alpha, t]}.$$

Тогда для каждой пары начальных данных (2) *найдется число $h(t_0, \varphi)$ $(0 < h < T - t_0)$ такое, что на промежутке $[t_0, t_0 + h)$ определено единственное решение $x(t) = x(t_0, \varphi(\cdot); t)$ задачи* (1) — (2).

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

3) *для каждого $\varepsilon > 0$ и каждых γ и g можно указать такое $\delta(\varepsilon, \gamma, g) > 0$, что для $\forall (t, \psi)$, $(\tilde{t}, \psi) \in \omega_{\gamma, g}$, удовлетворяющих условию $|t - \tilde{t}| < \delta$, выполняется неравенство*

$$\| F(t, \psi(\cdot)) - F(\tilde{t}, \psi(\cdot)) \| < \varepsilon;$$

4) *для каждого $\varepsilon > 0$ и каждых γ и $\tilde{\psi} \in C(J)$, можно указать такое $\eta(\varepsilon, \gamma, \tilde{\psi}) > 0$, что для $\forall \psi \in C(J)$, удовлетворяющих условию $\| \psi - \tilde{\psi} \|^J < \eta$, выполняется неравенство*

$$\| F(s, \psi(\cdot)) - F(s, \tilde{\psi}(\cdot)) \|^I < \varepsilon;$$

5) *оператор F компактен, т. е. для каждых γ и g множество $\{F\}_{\gamma, g}$ имеет в B компактное замыкание $K_{\gamma, g}$.*

Тогда для каждой пары начальных данных (2) *найдется число $h(t_0, \varphi)$ $(0 < h < T - t_0)$ такое, что на отрезке $[t_0, t_0 + h]$ определено по крайней мере одно решение $x(t) = x(t_0, \varphi(\cdot); t)$ задачи* (1) — (2).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* 3) — 5) *и условие*: 6) *для каждых γ и g_0 найдется такое $g_1(\gamma, g_0)$, что выполняется неравенство $d(g_0, B \setminus g_1) > (\gamma - \beta) M_1$, где $d(\cdot, \cdot)$ — расстояние между двумя множествами в B, $M_1(\gamma, g_1) = \sup \| z \|$ при $z \in \{F\}_{\gamma, g_1}$.*

Тогда для каждой пары начальных данных (2) *на всем промежутке $[t_0, T)$ определено по крайней мере одно решение $x(t) = x(t_0, \varphi(\cdot); t)$ задачи* (1) — (2).

Функционалы Ляпунова — Красовского $V(t, \psi(\cdot))$ для уравнения (1) на множестве Ω_γ определяются аналогично [6]. Будем говорить, что функционал V обладает свойством a, если можно указать неотрицательную определенную при $\rho \geqslant 0$ функцию $a(\rho)$ такую, что $a(\rho) \to \infty$ при $\rho \to \infty$ и при $\forall (t, \psi) \in \Omega_\gamma$ выполняется неравенство $V(t, \psi(\cdot)) \geqslant a(\| \psi(t) \|)$. И будем говорить, что функционал V обладает свойством b, если можно указать скалярную определенную при $\rho \geqslant 0$ функцию $b(\rho)$ такую, что при $\forall (t, \psi) \in \Omega_\gamma$ выполняется неравенство $V(t, \psi(\cdot)) \leqslant b(\| \psi \|^{[\alpha, t]})$.

Функционал $V(t, u(\cdot), v(\cdot))$, определенный на множестве Ξ_γ и имеющий значения в E^1, называется функционалом Ляпунова — Красовского для уравнения (1), если он обладает свойствами: неотрицателен; если $V(t, u(\cdot), v(\cdot)) = 0$, то $u(t_1) = v(t_1)$, и если $u(s) \equiv v(s)$ при $s \in [\alpha, t_1]$, то $V(t_1, u(\cdot), v(\cdot)) = 0$; непрерывен по t на I_γ при любых фиксированных $u, v \in C(J)$; удовлетворяет сильнолокальному условию Липшица (см. [6]) по аргументам u и v; имеет неположительную верхнюю правую производную по t в силу уравнения (1). Будем говорить, что функционал V обладает L-свойством, если для каждого g найдутся такие числа $L^{(1)}(g)$ и $L^{(2)}(g)$ $(0 < L^{(1)} \leqslant L^{(2)})$, что для $\forall (t, u, v) \in I_\gamma \times C_g \times C_g$ выполняется неравенство

$$L^{(1)} \| u(t) - v(t) \| \leqslant V(t, u(\cdot), v(\cdot)) \leqslant L^{(2)} \| u - v \|^{[\alpha, t]}.$$

Будем говорить, что решения задачи (1) — (2) на J равноограничены в ограниченном для φ, если для любого числа $M \geqslant 0$ можно указать такое число $N(M) > M$, что для $\forall t_0 \in I_\gamma$ выполняется свойство: если $\varphi \in C([\alpha, t_0] \to \overline{B}_M)$, то $x(t_0, \varphi(\cdot); t) \in C([t_0, \gamma) \to B_{N(M)})$.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняются условия* 1) *и* 2). *Для того чтобы все решения* $x(t_0, \varphi(\cdot); t)$ *были равноограничены на* J *в ограниченном для* φ, *необходимо и достаточно, чтобы для уравнения* (1) *существовал функционал Ляпунова—Красовского* $V(t, \psi(\cdot))$, *определенный на* Ω_γ, *обладающий свойствами* a *и* b.

Будем говорить, что решения задачи (1) — (2) на J удовлетворяют локальному условию Липшица по φ, если для любого множества g можно указать такое число $\widetilde{L}(g) \geqslant 1$, что для $\forall t_0 \in I_\gamma$ выполняется свойство: если $\varphi, \widetilde{\varphi} \in C([\alpha, t_0] \to g)$, то при $\forall t \in [t_0, \gamma]$ выполняется неравенство

$$\| x(t_0, \varphi(\cdot); t) - x(t_0, \widetilde{\varphi}(\cdot); t) \| \leqslant \widetilde{L} \| \varphi - \widetilde{\varphi} \|^{[\alpha, t_0]}.$$

Т е о р е м а 5. *Пусть выполняются условия* 3)—6). *Для того чтобы все решения* $x(t_0, \varphi(\cdot); t)$ *были на* J *единственны и удовлетворяли локальному условию Липшица по* φ, *необходимо и достаточно, чтобы для уравнения* (1) *существовал функционал Ляпунова—Красовского* $V(t, u(\cdot), v(\cdot))$, *определенный на множестве* Ξ_γ, *обладающий* L-*свойством*.

В заключение заметим, что теоремы 1 и 2 являются распространением теорем работ [1] (теорема 2) и [2], доказанных для конечномерного случая, на случай пространства B. Теорема 3 является более сильной теоремой, чем просто функциональное обобщение теорем 1 и 3 работы [3]. Кроме того, теоремы 1, 2 и условие достаточности теоремы 5 являются обобщениями соответствующих теорем работ [8] (гл. VII, теорема 1.1), [9] (теорема 1), [7] (теорема 12.3.1), доказанных для случая обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве B. Теорема 4 в части достаточности является некоторым аналогом теоремы 3 работы [10], доказанной для обыкновенных дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. D r i v e r R. D. Existence and stability of solutions of a delay-differential system.— Arch. Rat. Mech. and Anal., 1962, **10**, 5, p. 401—426.
2. М ы ш к и с А. Д. Замечание к статье Г. М. Жданова «О приближенном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом».— УМН, 1961, **16**, № 2, с. 131—133.
3. Р у д а к о в В. П. К вопросу о существовании решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения.— Дифференц. уравнения, 1971, **7**, № 11, с. 2013—2018.
4. К р а с о в с к и й Н. Н. О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени.— ПММ, 1956, **20**, № 3, с. 315—327.

5. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959. 211 с.
6. Рудаков В. П. О необходимых и достаточных условиях продолжимости решений дифференциально-функциональных уравнений запаздывающего типа.— УМЖ, 1974, **26**, № 6, с. 822—827.
7. Lakshmikantham V., Leela S. Differential and integral inequalities. Theory and Applications, Volume II. New York and London, Acad. Press, 1969. 450 p.
8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970. 534 с.
9. Corduneanu C. Equazioni differenziali negli spazi di Banach, teoremi di esistenza e di prolungabilita.— Rend. Accad. Naz. Lincei, 1957, **23**, 8, с. 226—230.
10. Йосидзава Т. Функция Ляпунова и ограниченность решений.— Математика (сб. переводов), 1965, **9**, № 5, с. 95—127.

Симферопольский
государственный университет

Поступила в редакцию 8.II.1975 г.,
после переработки — 3.V.1977 г.