УДК 519.1:513.83

Н. П. Хоменко, Т. М. Выврот

Свойства гиперпримитивных графов

В работе [1] исследована структура примитивных графов. Основная теорема работы [1] доказана с использованием теоремы III работы [2], а в [3] эта теорема передоказана на основе критерия Татта о несуществовании 1-фактора в простом конечном графе [2] (теорема IV). В данной работе исследуется структура гиперпримитивных графов без использования теорем Татта. Основные понятия и обозначения взяты из работы [4]. Рассматриваются простые конечные графы.

Теорема 1. *Примитивный граф будет гиперпримитивным тогда и только тогда, когда каждая пара несмежных его вершин является парой типа 2 либо когда он не содержит несмежных вершин.*

Доказательство. Необходимость. Пусть граф G порядка n гиперпримитивен. Если $n\equiv 1 \pmod 2$, то каждая пара его вершин — пара типа 1 и поэтому $\widetilde{G}^1=\varnothing$. Если $n\equiv 0 \pmod 2$, то $\widetilde{G}^1\neq\varnothing$. Пусть $(a_ra_s)\in\widetilde{G}^1$. Ясно, что существует 1-фактор $f_{[1]}(G+(a_ra_s))$. $\overline{(a_ra_s)}\in f_{[1]}(G+(a_ra_s))$, ибо в противном случае 1-фактор $f_{[1]}(G+(a_ra_s))$ был бы 1-фактором и в G, чего не может быть по условию. Поэтому $f_{[1]}(G+(a_ra_s))-\overline{(a_ra_s)}=f_{[1]}(G\setminus(a_r, a_s))$, следовательно, вершины a_r, a_s составляют пару типа 2 в G.

Достаточность. Если примитивный граф порядка n не содержит несмежных вершин, то $n\equiv 1 \pmod 2$ и он гиперпримитивен.

Пусть a_r, a_s — произвольная пара несмежных вершин примитивного графа G и пусть существует 1-фактор $f_{[1]}(G\setminus(a_r, a_s))$. Тогда граф $G+(a_ra_s)$ непримитивен. Следовательно, граф G гиперпримитивен.

Теорема 2. *Граф порядка n будет гиперпримитивным тогда и только тогда, когда при $n\equiv 0 \pmod 2$ он состоит из сложной звезды с k, $0\leqslant k\leqslant n/2-1$, центрами порядка звездчатости $n-k$ и $k+2$ полных непересекающихся графов нечетных порядков на нецентральных вершинах этой звезды, а при $n\equiv 1 \pmod 2$ является сложной звездой с n центрами.*

Доказательство. Необходимость. а) $n\equiv 0 \pmod 2$. Пусть граф G порядка n гиперпримитивен. Ясно, что $\widetilde{G}^1\neq\varnothing$ и, следовательно, существует по крайней мере одно ребро $(a_{l_1}a_{l_2})\in\widetilde{G}^1$. Согласно теореме 1 пара вершин a_{l_1}, a_{l_2} — пара типа 2 в G, т. е. существует 1-фактор $f_{[1]}(G\setminus(a_{l_1}, a_{l_2}))$.

В графе G нет чередующейся относительно $f_{[1]}(G\setminus(a_{l_1}, a_{l_2}))$ цепи, которая соединяла бы вершины a_{l_1}, a_{l_2} и ребра которой поочередно не принадлежали бы и принадлежали бы к $f_{[1]}(G\setminus(a_{l_1}, a_{l_2}))$. В самом деле, если бы такая цепь $c_G(a_{l_1}, a_{l_2})$ существовала, то

$$(c_G(a_{l_1}, a_{l_2})\setminus f^1_{[1]}(G\setminus(a_{l_1}, a_{l_2})))+(f_{[1]}(G\setminus(a_{l_1}, a_{l_2}))\setminus c_G(a_{l_1}, a_{l_2}))=f_{[1]}(G),$$

что противоречило бы примитивности графа G. Отсюда, в частности, следует, что концы $a_{l'_1}$, $a_{l'_2}$ любой пары $c_1=c_G(a_{l_1}, a_{l'_1})$, $c_2=c_G(a_{l_2}, a_{l'_2})$ непересекающихся чередующихся относительно $f_{[1]}(G\setminus(a_{l_1}, a_{l_2}))$ цепей четной длины не смежны в G. Поэтому $\rho(a_{l'_t}, G)<n-1$, $t=1, 2$. В графе G вершины $a_{l'_1}$, $a_{l'_2}$ составляют пару типа 2,

$$f_{[1]}(G\setminus(a_{l'_1}, a_{l'_2}))=f_{[1]}(c_1\setminus(a_{l'_1}))+f_{[1]}(c_2\setminus(a_{l'_2}))+f_{[1]}(G\setminus(a_{l_1}, a_{l_2}))\setminus(c_1+c_2).$$

Каждое ребро $(a_{\tau}a_{\tau_2})$ 1-фактора $f_{[1]}(G\setminus(a_{l_1}, a_{l_2}))$ принадлежит по крайней мере одной чередующейся относительно этого 1-фактора цепи

$c_G(a_{l_t}, \ldots, a_{\tau_1}, a_{\tau_2})$, $1 \leqslant t \leqslant 2$. Ведь если вершина a_{τ_1} с любой другой вершиной графа G составляет пару типа 1, то такой цепью будет цепь $c_G(a_{l_t}, a_{\tau_1}, a_{\tau_2})$, $1 \leqslant t \leqslant 2$. Если вершины a_{τ_1}, a_p составляют пару типа 2 в G, то вследствие существования 1-фактора $f_{[1]}(G \setminus (a_{\tau_1}, a_p))$ в G будет существовать чередующаяся относительно 1-фактора $f_{[1]}(G \setminus (a_{l_1}, a_{l_2}))$ цепь $c_G(a_{l_{t'}}, \ldots, a_{\tau_2})$, $1 \leqslant t' \leqslant 2$, а следовательно, и цепь $c_G(a_{l_{t'}}, \ldots, a_{\tau_2}, a_{\tau_1})$.

Пусть $d_{c_1}(a_{l_1}, a_r) \equiv 1 \pmod 2$. Допустим, что вершина a_r с вершиной $a_t \in c_1$ составляет пару типа 2 в G. Из существования 1-фактора $f_{[1]}(G \setminus (a_r, a_t))$ следует существование в G чередующейся относительно $f_{[1]}(G \setminus (a_{l_1}, a_{l_2}))$ цепи $c_G(a_{r_1}, a_{r_2})$, $|c_G^1(a_{r_1}, a_{r_2})| = 2p + 1$, $p \geqslant 0$, $d_{c_1}(a_{l_1}, a_{r_1}) \equiv 1 \pmod 2$, $d_{c_2}(a_{l_2}, a_{r_2}) \equiv 0 \pmod 2$. Цепь $c_2(a_{l_2}, a_{r_2}) + c_G(a_{r_2}, a_{r_1}) + c_1(a_{r_1}, a_{\mu_1})$ при $d_{c_2}(a_{l_2}, a_{\mu_2}) > d_{c_1}(a_{l_1}, a_{r_1})$ будет чередующейся относительно $f_{[1]}(G \setminus (a_{l_1}, a_{l_2}))$ и поэтому $(a_{\mu_1} a_{\mu_2}) \in \widetilde{G}^1$, $d_{c_1}(a_{l_1}, a_{\mu_2}) < d_{c_1}(a_{l_1}, a_{r_1})$, $d_{c_1}(a_{l_1}, a_{\mu_t}) \equiv 0 \pmod 2$, $t = 1, 2$. Итак, вершины a_{μ_1}, a_{μ_2} составляют пару типа 2 в G и $\rho(a_{\mu_t}, G) < n - 1$, $t = 1, 2$. Так как количество вершин четного расстояния на одну превышает количество вершин нечетного расстояния на c_2, на $c_1(a_{l_1}, a_{\mu_2'})$ и на $c_1(a_{\mu_1'}, a_{\mu_1''})$ при $(a_{\mu_2'} a_{r_1})$, $(a_{r_1} a_{\mu_1'}) \in G^1$, $d_{c_1}(a_{l_1}, a_{\mu_1''}) = \max d_{c_1}(a_{l_1}, a_{l_1'})$ и так как вершины четного расстояния одной из этих цепей не смежны в G с вершинами четного расстояния на других цепях, то граф $G \setminus (a_{r_1}, a_{t_1})$, где a_{t_1} — произвольная, отличная от a_{r_1} вершина графа G, примитивен, следовательно, вершины a_{r_1}, a_{t_1} составляют пару типа 1 в G и $\rho(a_{r_1}, G) = n - 1$. Таким образом, в этом случае граф G содержит сложную факторзвезду с центрами в вершинах a_{r_1}, $d_{c_1}(a_{l_1}, a_{r_1}) \equiv 1 \pmod 2$, смежными в 1-факторе $f_{[1]}(G \setminus (a_r, a_t))$, $a_r, a_t \in c_1$, с вершинами a_{r_2}, $d_{c_2'}(a_{l_2}, a_{r_2}) \equiv 0 \pmod 2$.

Если для любой вершины a_{r_t}, $d_{c_t}(a_{l_t}, a_{r_t}) \equiv 1 \pmod 2$, не найдется в G вершины, вместе с которой она составляет пару типа 2 в G, то $\rho(a_{r_t}, G) = n - 1$, $t = 1, 2$, и вследствие того, что на цепи $c_t\, |\{a_{r_t}^{\text{ч}}\}| = |\{a_{r_t}^{\text{н}}\}| + 1$, $d_{c_t}(a_{l_t}, a_{r_t}^{\text{ч}}) \equiv 0 \pmod 2$, $d_{c_t}(a_{l_t}, a_{r_t}^{\text{н}}) \equiv 1 \pmod 2$, граф G содержит сложную факторзвезду с центрами в вершинах $a_{r_t}^{\text{н}}$, $t = 1, 2$, причем количество ее центров на основании только что сказанного не превышает $\frac{n}{2} - 1$.

На множестве нецентральных вершин сложной факторзвезды графа G существует такое наименьшее количество ν чередующихся относительно $f_{[1]}(G \setminus (a_{l_1}, a_{l_2}))$ цепей, начинающихся и оканчивающихся в вершинах четного расстояния от a_{l_1} или a_{l_2}, что $\nu - 2$ равно количеству центров этой звезды. Вершины четного расстояния одной из этих цепей не смежны с вершинами четного расстояния каждой из остальных цепей. Поэтому пары вершин каждой из упомянутых цепей на нецентральных вершинах сложной факторзвезды графа G составляют пары типа 1 в G и, следовательно, в G являются парами смежных вершин. Таким образом, на множествах вершин этих цепей в G существуют непересекающиеся полные графы.

В случае, когда для любой вершины $a_{r'} \in c_1$, $d_{c_1}(a_{l_1}, a_{r'}) \equiv 1 \pmod 2$, вершина, вместе с которой она составляет пару типа 2 в G, принадлежит цепи c_2, в G существует такая чередующаяся относительно $f_{[1]}(G \setminus (a_{l_1}, a_{l_2}))$ цепь c_1', $a_{l_1} \in \partial c_1'$, на которой $d_{c_1'}(a_{l_1}, a_{r'}) \equiv 0 \pmod 2$ и, следовательно, $(a_{r'} a_{t''}) \in \widetilde{G}^1$, $d_{c_2}(a_{l_2}, a_{t''}) \equiv 0 \pmod 2$. Если же это справедливо и для любой вершины $a_{r''} \in c_2$, $d_{c_2}(a_{l_2}, a_{r''}) \equiv 1 \pmod 2$, то $c_1 \cap c_2 = \varnothing$ и так как вершины четного расстояния цепи c_1 не смежны с вершинами четного расстояния цепи c_2, пары вершин из одной цепи c_1 или c_2 являются парами типа 1 в G

и, следовательно, смежны в G. Значит, на множествах c_1^0 и c_2^0 вершин в G существуют полные графы.

б) $n \equiv 1 \pmod 2$. В гиперпримитивном графе G вследствие нечетности порядка произвольная вершина вместе с отличной от нее вершиной графа составляет пару типа 1, следовательно, $G = \mathrm{St}_0(\{a_i\}_1^n)$.

Достаточность. а) $n \equiv 0 \pmod 2$. Пусть граф G порядка n состоит из сложной звезды $\mathrm{St}_{n-k}(\{a_i\}_1^k)$ с k центрами a_i, $i = 1\,(1)\,k$, $0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2} - 1$, порядка звездчатости $n - k$ и $k + 2$ полных непересекающихся графов K_{m_t} нечетных порядков на ее нецентральных вершинах. Граф G примитивен, ибо если бы существовал 1-фактор в G, то он содержал бы $k + 2$ ребра, соединяющие $k + 2$ вершины, по одной из каждой компоненты графа $G \diagdown (\{a_i\}_1^k)$, с центрами сложной факторзвезды графа G, чего не может быть.

Пусть $(a_r a_s) \in \widetilde{G}^1$. Ясно, что $a_r \in K_{m_r}^0$, $a_s \in K_{m_s}^0$, $K_{m_r}, K_{m_s} \in \{K_{mt}\}_{t=1}^{k+2}$, $\sum_{t=1}^{k+2} K_{mt} = G \diagdown (\{a_i\}_1^k)$. Граф $G \diagdown (a_r, a_s)$ содержит 1-фактор, k ребер которого соединяют k центров a_i, $i = 1\,(1)\,k$, сложной звезды $\mathrm{St}_{n-k}(\{a_i\}_1^k)$ с вершинами a_{ν_j}, $j = 1\,(1)\,k$, графа $G \diagdown (\{a_i\}_1^k)$, по одной из каждой отличной от K_{m_r} и K_{m_s} его компоненты $K_{m_{\nu_j}}$, а все остальные ребра составляют множество ребер 1-факторов $f_{[1]}(K_{m_r} \diagdown (a_r))$, $f_{[1]}(K_{m_s} / (a_s))$ и $f_{[1]}(K_{m_{\nu_j}} \diagdown (a_{\nu_j}))$, $j = 1\,(1)\,k$. Следовательно, вершины a_r, a_s составляют пару типа 2 в G, а значит, согласно теореме 1 граф G гиперпримитивен.

б) $n \equiv 1 \pmod 2$. Граф $\mathrm{St}_0(\{a_i\}_1^n)$ порядка n примитивен, не содержит пар несмежных вершин, следовательно, он гиперпримитивен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хоменко Н. П., Выврот Т. М. Структура примитивных графов.— В кн.: Топологические аспекты теории графов, К., Ин-т математики АН УССР, 1971, с. 64—82.
2. Tutte W. T. The Factorization of Linear Graphs.— Journ. London Math. Soc., 1947, 22, p. 107—111.
3. Skupien Z. A Short Proof of the Theorem on the Structure of Maximal Graphs without 1-factors.— Prace Nauk. Inst. Mat. i Fiz. Teor. PWr., 1973, 9, p. 9—14.
4. Хоменко М. П. Про укладення графів в 2-многовиди і про їх структуру.— В кн.: φ-перетворення графів, К., Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 7—34.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 4.I.1976 г.,
после переработки — 20.IX.1977 г.