УДК 518.517.548

П. П. Злепко, Ф. М. Мигович

Применение модификации метода Ньютона — Канторовича для приближенного построения неявных функций

Пусть E, Λ — банаховы пространства, $T(x, \lambda)$ — определенный при $x \in E$, $\lambda \in \Lambda$, $\| x - x_0 \|_E \leqslant r$, $\| \lambda - \lambda_0 \|_\Lambda \leqslant \rho$ вполне непрерывный оператор со значениями в E.

Рассмотрим уравнение

$$x = T(x, \lambda). \tag{1}$$

Допустим, что

$$x_0 = T(x_0, \lambda_0), \tag{2}$$

и будем искать решения $x^*(\lambda)$ уравнения (1), близкие к x_0, при значениях λ, близких к λ_0.

Для приближенного решения этой задачи построения неявной функции в общем случае использовался метод последовательных приближений, а также основной и модифицированный методы Ньютона—Канторовича [1, 2].

В данной работе рассматривается применение проекционно-итеративных аналогов метода Ньютона — Канторовича [3—5] для построения неявной функции, заданной уравнением (1).

Последовательные приближения $x_{n+1}(\lambda)$ к $x^*(\lambda)$ будем определять из уравнений

$$x_{n+1}(\lambda) = T(x_n(\lambda), \lambda) - PT'_x(x_n, \lambda)(x_n(\lambda) - x_{n+1}(\lambda)) \tag{3}$$

и

$$x_{n+1}(\lambda) = T(x_n(\lambda), \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda)(x_n(\lambda) - x_{n+1}(\lambda)) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

где P — линейный проекционный оператор, проектирующий пространство E на его подпространство E_P $(P = P^2)$, $PT'_x(x_n, \lambda)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — производная Фреше оператора $PT(x, \lambda)$ по аргументу x при $x = x_n$.

Рассмотрим сначала алгоритм (3). Из равенства (3) определяем

$$x_{n+1}(\lambda) = x_n(\lambda) - [1 - PT'_x(x_n, \lambda)]^{-1}[x_n(\lambda) - T(x_n(\lambda), \lambda))]. \tag{5}$$

Для доказательства следующего ниже утверждения используем лемму из работы [6].

Лемма. *Пусть числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ строятся по рекуррентным формулам*

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{1 - a_n}, \quad a_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + b_n a_n}{(1 - a_n)^2} \tag{6}$$

и выполнены условия $0 < b_0 < 1$, $0 < a_0 < \frac{1}{2}(1 - b_0)^2$. Тогда при каждом n имеют место неравенства

$$0 < b_n = \frac{b_0}{(1 - a_0)\ldots(1 - a_{n-1})} < 1, \quad a_n \leqslant \frac{1}{2}(1 - b_n)^2, \tag{7}$$

причем знак равенства во второй формуле (7) имеет место тогда и только тогда, когда он имеет место при $n = 0$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится.

Замечание 1. Если существует оператор $[1 - PT'_x(x_0, \lambda_0)]^{-1} = \Gamma_0$ и выполняется условие $\| PT'_x(x_0, \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda_0) \| \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon \| \Gamma_0 \| < 1$, то существует оператор $[1 - PT'_x(x_0, \lambda)]^{-1} = \Gamma_{0\lambda}$, причем $\| \Gamma_{0\lambda} \| \leqslant \dfrac{\| \Gamma_0 \|}{1 - \varepsilon \| \Gamma_0 \|}$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) *существует* $[1 - PT'_x(x_0, \lambda_0)]^{-1} = \Gamma_0$;
2) $\| \Gamma_{0\lambda} [x_0(\lambda) - T(x_0(\lambda), \lambda] \| \leqslant \eta_0(\rho) \leqslant \eta_0$;
3) *при* $x, y \in S(x_0, r)$, $\lambda \in S(\lambda_0, \rho)$ *имеют место неравенства*

$$\| PT'_x(x, \lambda) - PT'_x(y, \lambda) \| \leqslant M(\rho) \| x - y \| \leqslant M \| x - y \|, \tag{8}$$

$$\| QT(x, \lambda) - QT(y, \lambda) \| \leqslant q(\rho) \| x - y \| \leqslant q \| x - y \|, \tag{9}$$

$$\| PT'_x(x_0, \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda_0) \| \leqslant \varepsilon, \ \varepsilon \| \Gamma_0 \| < 1; \tag{10}$$

4) $h = \dfrac{\| \Gamma_0 \| M\eta_0}{1 - \varepsilon \| \Gamma_0 \|} = \| \Gamma_{0\lambda} \| M\eta_0 \leqslant \dfrac{(1 - p_0)^2}{2}$.

Тогда в шаре $S(x_0, r_0): \| x - x_0 \| \leqslant r_0$, *где*

$$r_0 = \frac{1 - P_0 - \sqrt{(1 - P_0)^2 - 2h_0}}{h_0}\eta_0, \tag{11}$$

при $\lambda \in S(\lambda_0, P)$ *существует неявная функция* $x^*(\lambda)$, *к которой сходится процесс* (3).

Доказательство. Все условия теоремы сохраняются, если $x_0(\lambda)$ заменим на $x_1(\lambda)$ и т. д.

Действительно, r_0—неотрицательное решение уравнения $\frac{\|\Gamma_{0\lambda}\| M}{2} y^2 + p_0 y + \eta_0 = y$, где левая часть уравнения — монотонно возрастающая при $y \geqslant 0$ функция. Поэтому $r_0 \geqslant \eta_0$. Отсюда

$$\| x_1(\lambda) - x_0(\lambda) \| = \| \Gamma_{0\lambda} [x_0(\lambda) - T(x_0(\lambda), \lambda)] \| \leqslant \eta_0 \leqslant r_0.$$

Если использовать неравенство (8), то на основании теоремы Банаха легко можно доказать существование оператора $\Gamma_{1\lambda} = [1 - PT'_x(x_1, \lambda)]^{-1}$, при этом $\| \Gamma_{1\lambda} \| \leqslant \frac{\| \Gamma_{0\lambda} \|}{1 - \| \Gamma_{0\lambda} \| M \eta_0} = \frac{\| \Gamma_{0\lambda} \|}{1 - h_0}$. Учитывая, что $1 = P + Q$, имеем

$$\| \Gamma_{1\lambda} [x_1(\lambda) - T(x_1(\lambda), \lambda)] \| = \| \Gamma_{1\lambda} [QT(x_0(\lambda), \lambda) - QT(x_1(\lambda), \lambda)] +$$
$$+ \Gamma_{1\lambda} [PT(x_0(\lambda), \lambda) - PT(x_1(\lambda), \lambda) + PT'_x(x_0, \lambda)(x_1(\lambda) - x_0(\lambda) \|. \quad (12)$$

Введем обозначения $p_n = \| \Gamma_{n\lambda} \| q \qquad (n = 1, 2, \ldots)$.

Использовав в (12) формулу конечных приращений, при условиях теоремы получим

$$\| \Gamma_{1\lambda} [x_1(\lambda) - T(x_1(\lambda), \lambda)] \| \leqslant p_1 \| x_1(\lambda) - x_0(\lambda) \| + \frac{\| \Gamma_{1\lambda} \| M}{2} \| x_1(\lambda) - x_0(\lambda) \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| \Gamma_{1\lambda} \| \left(q\eta_0 + \frac{M}{2} \eta_0^2 \right) = \frac{\frac{1}{2} \| \Gamma_{0\lambda} \| M \eta_0^2 + p_0 \eta_0}{1 - \| \Gamma_{0\lambda} \| M \eta_0} = \frac{\frac{1}{2} h_0 + p_0}{1 - h_0} \eta_0 = \eta_1,$$

Отсюда видно, что $h_1 = \| \Gamma_{1\lambda} \| M \eta_1 = \frac{\frac{1}{2} h_0^2 + p_0 h_0}{(1 - h_0)^2}$. Значит, p_1 и h_1 построены по формулам (6). Тогда $p_1 < 1$, $h_1 \leqslant \frac{1}{2}(1 - p_1)^2$. Шар $S(x_1, \lambda_1)$ принадлежит шару $S(x_0, \lambda_0)$, так как легко проверяется равенство $r_1 = r_0 - \eta_0$. Из сказанного выше следует, что все условия теоремы выполняются и в точке $x_1(\lambda)$. По индукции доказывается, что все условия теоремы выполняются в любой точке $x_n(\lambda)$, определенной согласно (5).

На основании леммы ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n$ сходится как в случае $p_0 > 0$, так и в случае $p_0 = 0$. Если $\| \Gamma_{0\lambda} \| M > 0$, то на основании условия 4) теоремы и (6) имеем

$$\eta_n = \frac{h_n}{\| \Gamma_{n\lambda} \| M} = \frac{h_n}{\| \Gamma_{0\lambda} \| M} (1 - h_{n-1}) \ldots (1 - h_0) < \frac{h_n}{\| \Gamma_{0\lambda} \| M}$$

и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \eta_n$ сходится, как мажорированный рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n$.

Фундаментальность последовательности $\{x_n(\lambda)\}$ следует из неравенства

$$\| x_{n+p}(\lambda) - x_n(\lambda) \| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \eta_k \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \eta_k.$$

Предел этой последовательности $x^*(\lambda)$ принадлежит шару $S(x_0, r_0)$. Неравенство $\| PT'_x(x, \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda) \| \leqslant Mr_0$ выполняется для любого $x \in$

$\in S(x_0, \lambda_0)$. Отсюда следует ограниченность операторов $PT'_x(x_n, \lambda)$ совокупно по норме пространства линейных операторов.

Тогда из равенства (3) при $n \to \infty$ имеем $x^*(\lambda) = T(x^*(\lambda), \lambda)$. Значит, x^* — неявная функция, к которой сходится процесс (5). Быстрота сходимости (5) зависит от быстроты сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$.

Если искать последовательные приближения для уравнения (1) согласно алгоритму (3), то на каждом шаге приходится решать линейное операторное уравнение с оператором, зависящим от x_n. Более удобным для вычислений является алгоритм (4). В следующей теореме приводятся достаточные условия сходимости алгоритма (4) и оценка погрешности последовательных приближений.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *существует* $[1 - PT'_x(x_0, \lambda_0)]^{-1} = \Gamma_0$;

2) $\| \Gamma_{0\lambda} [x_0(\lambda) - T(x_0(\lambda), \lambda)] \| \leqslant \eta_0(\rho) \leqslant \eta_0$;

3) *при* $x, y \in S(x_0, r)$, $\lambda \in S(\lambda_0, \rho)$ *имеют место неравенства* (8)—(10);

4) *для* $h_0 = \frac{\| \Gamma_0 \| M\eta_0}{1 - \varepsilon \| \Gamma_0 \|}$, $p_0 = \frac{\| \Gamma_0 \| q}{1 - \varepsilon \| \Gamma_0 \|} < 1$ *выполняются соотношения* $h_0 < \frac{(1-p_0)^2}{2}$. *Тогда в шаре* $S(\| x - x_0 \| \leqslant r_0)$, *где* $r_0 = t_1 \eta_0$, *а* t_1 — *— меньший корень уравнения* $\frac{h_0}{2} t^2 - (1 - p_0) t + 1 = 0$, *при* $\lambda \in S(\lambda_0, \rho)$ *существует неявная функция* $x^*(\lambda)$, *последовательные приближения к которой вычисляются по формулам* (4) *и сходятся с оценкой погрешности*

$$\| x_n(\lambda) - x^*(\lambda) \| \leqslant \frac{k^n}{1-k} \| x_1(\lambda) - x_0(\lambda) \|$$

$$(k = 1 - \sqrt{(1-p_0)^2 - 2h_0}).$$

Доказательство. Введем обозначения $A(x, \lambda) = \Gamma_{0\lambda} [T(x, \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda) x]$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде $x_{n+1}(\lambda) = A(x_n(\lambda), \lambda)$.

Покажем, что оператор $A(x(\lambda), \lambda)$ при указанных условиях переводит шар $S(x_0, r_0)$ в себя.

Действительно, имеем

$$\| A(x, \lambda) - x_0 \| = \| \Gamma_{0\lambda} [T(x, \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda) x] - x_0 \| \leqslant$$

$$\leqslant \| \Gamma_{0\lambda} [PT(x, \lambda) - PT(x_0, \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda)(x - x_0) \| +$$

$$+ \| \Gamma_{0\lambda} [QT(x, \lambda) - QT(x_0, \lambda)] \| + \| \Gamma_{0\lambda} [T(x_0, \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda) x_0] -$$

$$- x_0 \| \leqslant \frac{\| \Gamma_{0\lambda} \| M}{2} \| x - x_0 \|^2 + \| \Gamma_{0\lambda} \| q \| x - x_0 \| + \| \Gamma_{0\lambda} [T(x_0, \lambda) - x_0] \|.$$

Поскольку на основании теоремы Банаха $\| \Gamma_{0\lambda} \| \leqslant \frac{\| \Gamma_0 \|}{1 - \varepsilon \| \Gamma_0 \|}$, то $\| A(x, \lambda) - x_0 \| \leqslant \left(\frac{h_0}{2} t^2 + p_0 t + 1 \right) \eta_0$. Отсюда видно, что при $t = t_1$, где $t_1 = \frac{1 - p_0 - \sqrt{(1-p_0)^2 - 2h_0}}{h_0}$, оператор $A(x, \lambda)$ переводит шар $S(x_0, r_0)$ в себя.

Покажем, далее, что оператор $A(x, \lambda)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $k < 1$.

$$\|A(x, \lambda) - A(y, \lambda)\| = \|\Gamma_{0\lambda}[T(x, \lambda) - T(y, \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda)(x - y)]\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\Gamma_{0\lambda}\| \|PT(x, \lambda) - PT(y, \lambda) - PT'_x(x_0, \lambda)(x - y) + QT(x, \lambda) -$$

$$- QT(y, \lambda)\| \leqslant \|\Gamma_{0\lambda}\| \left\| \int_0^1 [PT'_x(y + t(x - y), \lambda)(x - y) - PT'_x(x_0, \lambda)(x - \right.$$

$$\left. - y)] \, dt \right\| + \|\Gamma_{0\lambda}\| q \|x - y\| \leqslant [\|\Gamma_{0\lambda}\| M r_0 + \|\Gamma_{0\lambda}\| q] \|x - y\| \leqslant (h_0 t_1 +$$

$$+ p_0)\|x - y\|.$$

Итак, $A(x, \lambda)$ — оператор сжатия, следовательно, имеет единственную неподвижную точку $x^*(\lambda)$, $x \in s(x_0, r_0)$. Точка $x^*(\lambda)$ является пределом последовательных приближений $x_n(\lambda)$, определяемых уравнениями (4).

Оценку погрешности можно получить как и в методе последовательных приближений (см. [2]).

Замечание 2. В отличие от основного и модифицированного алгоритмов Ньютона—Канторовича, для реализации которых требуется существование соответственно производных $T'_x(x_n, \lambda)$ и $T'_x(x_0, \lambda)$, в случае алгоритмов (3) и (4) допускается существование только производных $PT'_x(x_n, \lambda)$ и $PT'_x(x_0, \lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959. 684 с.
2. Приближенное решение операторных уравнений, М., «Наука», 1969. 455 с. Авт. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др.
3. Курпель Н. С., Мигович Ф. М. О некоторых обобщениях метода Ньютона—Канторовича.— УМЖ, 1965, 17, № 3, с. 610—625.
4. Гречко В. І. Про оцінку похибки одного узагальнення методу Ньютона—Канторовича.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 8, с. 679—682.
5. Дабрашова М. І., Зінченко О. І., Ярушевська А. С. Про модифікацію основного методу Ньютона—Канторовича.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 8, с. 682—685.
6. Зінченко О. І. Про деякі методи наближеного розв'язання рівнянь з недиференційовними операторами.— Допов. АН УРСР, 1963, № 2, с. 156—161.

Тернопольский
финансово-экономический институт

Поступила в редакцию
29.XI. 1976 г.