УДК 517.949.2

М. М. Константинов

Об одном функциональном неравенстве

Рассмотрим функциональное неравенство

$$x(t) \leqslant f(t) + g(t, x_t) = h(t, x_t), \quad t \in J_T = [0, T); \quad 0 < T \leqslant \infty, \qquad (1)$$

определенное на множестве Ω непрерывных неотрицательных функций $x : J_T \to J_\infty$. Здесь $f \in \Omega$ — неубывающая функция, а $g : J_T \times \Omega \to J_\infty$ — функционал, зависящий от t как непосредственно, так и посредством значения $x_t = x(s)$ функции x при $0 \leqslant s \leqslant t$ (т. е. $g(t, x_t)$ — сужение функции x

на интервал $[0, t]$). Функционал такого типа определяется, например, формулой

$$g(t, x_t) = \hat{g}\left[t, \int_0^t x(s)\, d_s r(t, s)\right]$$

при подходящем выборе ядра r, где $\hat{g}: J_T \times J_\infty \to J_\infty$ — некоторая функция, а интеграл понимается в смысле Стильтьеса [1].

Если функция $x \in \Omega$ тождественно постоянна: $x(t) \equiv \xi = \text{const} \geqq 0$, то будем писать $g(t, x_t) = g(t, \xi)$.

Пусть выполнены условия:

1. Для каждого $x \in \Omega$ функция φ, $t \mapsto \varphi(t) = \dot{g}(t, x_t)$, непрерывна, неубывает и $\varphi(0) = 0$.

2. Функционал g линеен по x, т. е. $g(t, (ax + by)_t) = ag(t, x_t) + bg(t, y_t)$ для любых $a, b \in J_\infty$ и $x, y \in \Omega$.

Тогда имеет место оценка

$$x(t) \leqslant f(t) \exp[g(t, 1)], \qquad t \in J_T. \tag{2}$$

Действительно, пусть $x \in \Omega$, $u(t) = h(t, x_t)$ и $f(0) > 0$. Для фиксированного $t \in J_T$ положим $t_i = i\Delta$ $(i = 0, \ldots, n;\ \Delta = t/n)$, $u_i = u(t_i)$, $f_i = f(t_i)$ и $g_{ij} = g(t_i, (x/u_j)_{t_i})$. Так как $f(t) \leqslant u(t)$, то из (1) и условия 2 следует

$$\begin{aligned}(u_i - u_{i-1})/u_i = (f_i - f_{i-1})/u_i + g_{ii} - g_{i-1,i} \leqslant \\ \leqslant (f_i - f_{i-1})/f_i + g_{ii} - g_{i-1,i}.\end{aligned} \tag{3}$$

С другой стороны, в силу неубывания функций f и φ имеем $x(s) \leqslant u(s) \leqslant u(t)$ для $0 \leqslant s \leqslant t$. Из неравенства

$$g(t_i, (1 - x/u_i)_{t_i}) \geqq g(t_{i-1}, (1 - x/u_i)_{t_{i-1}})$$

вытекает

$$g_{ii} - g_{i-1,i} \leqslant g(t_i, 1) - g(t_{i-1}, 1). \tag{4}$$

При $n \to \infty$ из (3) и (4) находим

$$\int_0^t \frac{d_s u(s)}{u(s)} \leqslant \int_0^t \frac{d_s f(s)}{f(s)} + \int_0^t d_s g(s, 1)$$

и $\ln(u(t)/f_0) \leqslant \ln(f(t)/f_0) + g(t, 1)$, откуда следует (2). Случай $f_0 = 0$ получается предельным переходом $f_0 \to 0$.

Если, например,

$$g(t, x_t) = \int_0^t g_0(t, s)\, x(s)\, ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_k} g_k(t, s, t_1, \ldots, t_k)\, x(s)\, ds dt_k \ldots dt_1,$$

то для выполнения условия 1 достаточно потребовать, чтобы g_ν, $\nu = 0, \ldots, m$, были неотрицательными, непрерывными и неубывающими по t функциями. В этом случае из (2) следует

$$x(t) \leqslant f(t) \exp\left[\int_0^t g_0(t, s)\, ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_k} g_k(t, s, t_1, \ldots, t_k)\, ds dt_k \ldots dt_1\right]. \tag{5}$$

Неравенство (5) обобщает некоторые известные интегральные неравенства, например неравенства Гронуолла—Беллмана, Быкова [2] и др.

Отметим, что при нарушении условий неубывания функций φ (при всех $x \in \Omega$) или f, оценка (2) может не иметь места.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.—Л., Гостехиздат, 1950, 399 с.
2. Филатов А. Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, «Фан», 1971, 278 с.

София,
Высший машинно-электротехнический институт

Поступила в редакцию
1.IX. 1976г.