УДК 517.948

А. Н. Кочубей

О структуре спектра несамосопряженного абстрактного дифференциального оператора

Рассмотрим в $\mathfrak{H}=L_2(H,(-\infty,\ \infty))$ (H — сепарабельное гильбертово пространство) дифференциальное выражение

$$l[y]=(-1)^n y^{(2n)}+Ay+q(t)\,y, \tag{1}$$

где A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H с дискретным спектром, $q(t)$ — сильно измеримая операторная функция, значениями которой являются ограниченные в H операторы, причем

$$\|q(t)\|\leqslant Ce^{-a|t|},\qquad a>0. \tag{2}$$

На множестве D_0' элементов вида $y=\sum\limits_{k=1}^{m}\varphi_k(t)\,f_k,\ f_k\in D(A),\ \varphi_k(t)\in C_0^\infty(-\infty,\ \infty)$, определим оператор $L_0': L_0'y=l[y]$. Оператор L_0' допускает замыкание L_0 в $\mathfrak{H}$, называемое минимальным оператором, порожденным выражением (1). Область определения оператора L_0 описана в [1].

Обозначим через $\{\mu_m\}_1^\infty$ последовательность различных собственных значений оператора A, расположенных в порядке возрастания. Пусть

$$\Omega_m^+=\{\lambda\in\mathbf{C}^1\mid\lambda=\rho+i\sigma,\ \rho\in(\mu_m,\ \mu_{m+1}),\ \sigma>0\}.$$

Определим в $\mathfrak{H}$ оператор S формулой $(Sy)(t)=e^{-\frac{a}{2}|t|}y(t)$. Ниже доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Оператор-функция $T_\lambda=SR_\lambda(L_0)\,S$ аналитически продолжима из области Ω_m^+ в более широкую область $\Omega_m\supset(\mu_m,\ \mu_{m+1})$. Собственные значения оператора L_0, лежащие в Ω_m^+ или $(\mu_m,\ \mu_{m+1})$, являются полюсами T_λ.*

Полюсы T_λ, лежащие на вещественной оси и не являющиеся собственными значениями оператора L_0, называются спектральными особенностями.

В данной заметке рассмотрим структуру множества собственных значений и спектральных особенностей оператора L_0. Начнем с описания спектра минимального оператора Λ_0, порожденного выражением (1) с $q(t)\equiv 0$. Очевидно, $\Lambda_0^*=\Lambda_0$, и спектр Λ_0 совпадает с полуосью $[\mu_1,\ \infty)$.

Лемма 2. *Оператор Λ_0 не имеет собственных значений.*

Доказательство. Пусть Λ_0^0 — минимальный оператор, порожденный в $L_2(-\infty,\ \infty)$ выражением $(-1)^n\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}$. Тогда (см. [2]) при любых

$f', g' \in L_2(-\infty, \infty)$, $f'', g'' \in H$

$$(G_\lambda(f' \otimes f''), g' \otimes g'')_{\mathfrak{H}} = \int_{-\infty}^{\infty} (F_{\lambda-\mu} f', g')_{L_2(-\infty,\infty)} d(E_\mu f'', g'')_H =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (F_{\lambda-\mu_j} f', g')_{L_2(-\infty,\infty)} (\Delta E_{\mu_j} f'', g'')_H,$$

где E_λ, F_λ и G_λ — разложения единицы соответственно операторов A, Λ_0^0 и Λ_0. Из признака Абеля легко следует, что ряд сходится равномерно относительно λ, т. е. $(G_\lambda(f' \otimes f''), g' \otimes g'')_{\mathfrak{H}}$ — непрерывная функция от λ. Лемма доказана.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема. *Спектр оператора L_0 состоит из полуоси $[\mu_1, \infty)$ и не более чем счетного множества изолированных собственных значений конечной кратности. При этом собственные значения оператора L_0 (включая лежащие на $[\mu_1, \infty)$), а также спектральные особенности, могут сгущаться лишь к точкам $\{\mu_m\}$ и к ∞.*

Замечания. 1. В предположении, что $A^{-\frac{2n-1}{2n}}$ — оператор Гильберта—Шмидта, вопрос о точках сгущения множества собственных значений рассмотрен в работе [3], где на $q(t)$ были ошибочно наложены условия, более слабые, чем (2) (на эту ошибку автору указал Х. Х. Муртазин). Методика работы [3] становится корректной, если вместо введенного в [3] оператора P_λ рассматривать оператор $-P_2R_\lambda(\Lambda_0)P_1$, где $(P_1y)(t) = \sqrt{\|q(t)\|}\,y(t)$, $(P_2y)(t) = p_2(t)\,y(t)$, $p_2(t) = \begin{cases} 0, & q(t) = 0; \\ \|q(t)\|^{-\frac{1}{2}} q(t), & q(t) \neq 0 \end{cases}$, но применима лишь в том случае, когда $A^{-\frac{2n-1}{2n}}$ — оператор Гильберта — Шмидта.

2. Для других классов дифференциально-операторных выражений аналогичные вопросы изучались в [4 — 7].

Доказательство теоремы. Из результатов работы [8] следует, что для доказательства теоремы, а также леммы 1, достаточно установить, что оператор-фукция $Q_\lambda = SR_\lambda(\Lambda_0)S$ допускает аналитическое продолжение Q_λ^+ из области Ω_m^+ в область $\Omega_m \supset \Omega_m^+ \cup (\mu_m, \mu_{m+1})$ $(m = 1, 2, \ldots;$ очевидно, $\Omega_m \setminus \Omega_m^+$ лежит на втором листе римановой поверхности), причем при всех $\lambda \in \Omega_m$ значения оператор-функции Q_λ^+ являются вполне непрерывными операторами в $\mathfrak{H}$, и что аналогичные результаты имеют место для продолжения Q_λ из нижней полуплоскости.

Покажем, что при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $h(t) \in \mathfrak{H}$

$$(R_\lambda(\Lambda_0)h)(t) = \frac{(-1)^n}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha_k^{2n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_k \sqrt[2n]{A-\lambda E}\,|t-s|} (A-\lambda E)^{-\frac{2n-1}{2n}} h(s)\, ds, \quad (3)$$

где α_k — корни степени $2n$ из $(-1)^{n+1}$, для которых $\operatorname{Re}\alpha_k < 0$, E — тождественный оператор. Докажем вначале ограниченность в $\mathfrak{H}$ интегрального оператора в правой части (3). Из свойств свертки следует, что достаточно проверить включение $\|e^{\alpha_k \sqrt[2n]{A-\lambda E}\,|t|}\| \in L_1(-\infty, \infty)$.

Имеем $\|e^{\alpha_k \sqrt[2n]{A-\lambda E}\,|t|}\| \leqslant \sup_j |e^{\operatorname{Re}\left(\alpha_k \sqrt[2n]{\mu_j-\lambda}\right)}|$. Пусть $\lambda = \xi + i\eta$, $\operatorname{Im}\xi =$

$=\operatorname{Im}\eta=0$. Если $\mu_j-\xi>0$, то $\left|\dfrac{\operatorname{Im}\sqrt[2n]{\mu_j-\lambda}}{\operatorname{Re}\sqrt[2n]{\mu_j-\lambda}}\right|=\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2n}\operatorname{arctg}\dfrac{\eta}{\mu_j-\xi}\right)\right|<\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}$. Простой подсчет показывает, что $\left|\dfrac{\operatorname{Re}\alpha_k}{\operatorname{Im}\alpha_k}\right|>\gamma\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}$ $(k=1, 2, \ldots, n;\ \gamma>1)$, откуда

$$|\operatorname{Im}\alpha_k\operatorname{Im}\sqrt[2n]{\mu_j-\lambda}|<\frac{1}{\gamma}|\operatorname{Re}\alpha_k\operatorname{Re}\sqrt[2n]{\mu_j-\lambda}|.$$

Поэтому $\operatorname{Re}(\alpha_k\sqrt[2n]{\mu_j-\lambda})=\operatorname{Re}\alpha_k\operatorname{Re}\sqrt[2n]{\mu_j-\lambda}-\operatorname{Im}\alpha_k\operatorname{Im}\sqrt[2n]{\mu_j-\lambda}\leqslant\gamma_1\times\times(\operatorname{Re}\alpha_k)[(\mu_j-\xi)^2+\eta^2]^{\frac{1}{4n}}\cos\dfrac{\pi}{4n}\leqslant\gamma_1(\operatorname{Re}\alpha_k)|\eta|^{\frac{1}{2n}}\cos\dfrac{\pi}{4n}=-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{2n}}$, где $\varepsilon>0$ не зависит от j. Если $\mu_j-\xi\leqslant0$, то также $\operatorname{Re}(\alpha_k\sqrt[2n]{\mu_j-\lambda})<0$, и поскольку неравенство $\mu_j-\xi\leqslant0$ может иметь лишь для конечного числа значений j, при фиксированном λ получим

$$\left\|e^{\alpha_k\sqrt[2n]{A-\lambda E}\,|t|}\right\|\leqslant C_1e^{-\varepsilon_1|t|},\qquad\varepsilon_1>0.$$

Равенство (3), которое теперь достаточно доказать для финитных h, проверяется непосредственно (ср. [9, 10]).

Рассмотрим (при фиксированных t, s) оператор-функцию

$$f_{t,s}(\lambda)=e^{\alpha_k\sqrt[2n]{A-\lambda E}|t-s|}(A-\lambda E)^{-\frac{2n-1}{2n}},\qquad\lambda\in\Omega_m^+.$$

Очевидно, $f_{t,s}(\lambda)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}F_j(\lambda)\,\Delta E_{\mu_j}$, где

$$F_j(\lambda)=\begin{cases}e^{\alpha_k\sqrt[2n]{\mu_j-\lambda}|t-s|}(\mu_j-\lambda)^{-\frac{2n-1}{2n}}, & j\geqslant m+1,\\ e^{\alpha_k\exp\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\sqrt[2n]{\lambda-\mu_j}|t-s|}(\lambda-\mu_j)^{-\frac{2n-1}{2n}}e^{-i\frac{(2n-1)\pi}{2n}}, & j\leqslant m.\end{cases}$$

При каждом j функция $F_j(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение из Ω_m^+ в область $\widetilde{\Omega}_m=\{\lambda\mid\lambda=\rho+i\sigma,\ \rho\in(\mu_m,\ \mu_{m+1})\}$. Выше показано, что при $\operatorname{Im}\lambda\neq0$

$$\operatorname{Re}(\alpha_k\sqrt[2n]{\mu_i-\lambda})\leqslant-\varepsilon|\operatorname{Im}\lambda|^{\frac{1}{2n}},\ \varepsilon>0;\ j\geqslant m+1.$$

Отсюда следует оценка $|F_j(\lambda)|\leqslant C_2$ в случае, когда λ пробегает произвольное компактное подмножество $K\subset\widetilde{\Omega}_m$, причем C_2 не зависит от $j\geqslant m+1$. Следовательно, оператор-функция $f_{t,s}(\lambda)$ аналитически продолжима в $\widetilde{\Omega}_m$.

Оценим $\|f_{t,s}(\lambda)\|$. Как известно, $\|f_{t,s}(\lambda)\|\leqslant\sup\limits_j|F_j(\lambda)|$. Если $j\geqslant m+1$, то при $\lambda\in K\subset\widetilde{\Omega}_m$

$$|F_j(\lambda)|\leqslant C_3e^{-\varepsilon_2|t-s|},\ \varepsilon_2>0.$$

Если же $j\leqslant m$, то

$$\operatorname{Re}(\alpha_ke^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt[2n]{\lambda-\mu_j})=\operatorname{Re}(\alpha_k e^{\frac{i\pi}{2n}})\operatorname{Re}\sqrt[2n]{\lambda-\mu_j}-\operatorname{Im}(\alpha_ke^{\frac{i\pi}{2n}})\operatorname{Im}\sqrt[2n]{\lambda-\mu_j}\leqslant$$
$$\leqslant-\operatorname{Im}(\alpha_ke^{\frac{i\pi}{2n}})\operatorname{Im}\sqrt[2n]{\lambda-\mu_j}\leqslant|\operatorname{Im}\sqrt[2n]{\lambda-\mu_j}|.$$

Отсюда видно, что в случае, когда λ пробегает компактное подмножество области

$$\Omega_m = \{\lambda \mid \lambda = \rho + i\sigma,\ \rho \in (\mu_m,\ \mu_{m+1}),\ \sigma > -\sigma_0\},$$

где $\sigma_0 > 0$ достаточно мало, имеет место оценка $|F_j(\lambda)| \leqslant C_4 e^{\delta|t-s|}$, $0 < \delta < \frac{a}{2}$ и, следовательно,

$$\| f_{t,s}(\lambda) \| \leqslant C_5 e^{\delta|t-s|},\ 0 < \delta < \frac{a}{2}.$$

Учитывая (3), находим, что оператор-функция Q_λ представима в виде

$$(Q_\lambda h)(t) = e^{-\frac{a}{2}|t|} \int_{-\infty}^{\infty} W(s,\ t,\ \lambda)\, e^{-\frac{a}{2}|s|} h(s)\, ds, \tag{4}$$

где $W(s,\ t,\ \lambda)$ — аналитическая оператор-функция в Ω_m, удовлетворяющая неравенству

$$\| W(s,\ t,\ \lambda) \| \leqslant C_6 e^{\delta|t-s|},\ 0 < \delta < \frac{a}{2},$$

если λ пробегает компактное подмножество Ω_m. Следовательно, Q_λ допускает аналитическое продолжение Q_λ^+ из области Ω_m^+ в область Ω_m, задаваемое той же формулой (4). Воспользовавшись условием полной непрерывности интегрального оператора с операторнозначным ядром, доказанным в [11], устанавливаем полную непрерывность в $\mathfrak{H}$ оператора Q_λ^+ при всех $\lambda \in \Omega_m$.

Аналитическое продолжение оператор-функции Q_λ из нижней полуплоскости рассматривается аналогично. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочубей А. Н. О самосопряженности и характере спектра некоторых классов абстрактных дифференциальных операторов.— УМЖ, 1973, **25**, № 6, с. 811—815.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— К., «Наукова думка», 1965, 798 с.
3. Кочубей А. Н. О спектре несамосопряженных возмущений абстрактных дифференциальных операторов.— УМЖ, 1975, **27**, № 5, с. 667—669.
4. Шаясюк С. Г. Про диференціальний оператор зі спектральними особливостями у просторі вектор-функцій.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 1, с. 39—42.
5. Гасымов М. Г. Разложение по собственным функциям дифференциальных операторов с непрерывной частью спектра.— Изв. АН АзССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1970, № 1—2, с. 19—39.
6. Муртазин Х. Х. О точечном спектре одного класса дифференциальных операторов.— ДАН СССР, 1974, **219**, № 6, с. 1322—1324.
7. Керимов Я. Р. Исследование спектра несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка с операторными коэффициентами на действительной оси.— Тр. летней школы по спектр. теории операторов и теории предст. групп, Баку, «Элм», 1975, с. 122—129.
8. Гасымов М. Г., Максудов Ф. Г. О главной части резольвенты несамосопряженных операторов в окрестности спектральных особенностей.— Функциональный анализ и его приложения, 1972, **6**, вып. 3, с. 16—24.
9. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. О спектре самосопряженных расширений минимального оператора, порожденного уравнением Штурма—Лиувилля с операторным потенциалом.— УМЖ, 1972, **24**, № 6, с. 602—609.
10. Горбачук М. Л., Кочубей А. Н. Самосопряженные граничные задачи для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высокого порядка.— ДАН СССР, 1971, **201**, № 5, с. 1029—1032.
11. Беговатов Е. А. Условие полноты системы корневых подпространств оператора типа Штурма—Лиувилля в гильбертовом пространстве.— Дифференц. уравнения, 1972, **8**, № 10, с. 1738—1744.

Киевский отдел комплексного проектирования
института «Энергосетьпроект»

Поступила в редакцию
29.IX. 1976 г.