УДК 519.21

И. К. Мацак

Регулярность выборочных функций случайного процесса

Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$,— случайный процесс, заданный на вероятностном пространстве (Ω, B, P).

В данной работе предлагаются достаточные условия непрерывности, отсутствия разрывов 2-го рода, дифференцируемости общего случайного процесса. Показывается, что в общем случае приведенные условия не могут быть ослаблены.

Будем предполагать, не оговаривая особо, что везде рассматривается сепарабельный стохастически непрерывный процесс $\xi(t)$.

1. Положим $\sigma_p(t) = \sup\limits_{\substack{s\in[0,1],\\ t+s\in[0,1]}} M|\xi(t+s)-\xi(s)|^p,\ p>1$.

Первым условием непрерывности выборочных функций общего случайного процесса является известное условие Колмогорова. Последние результаты в этом направлении можно найти в работе [1].

Теорема 1. А. *Если функция* $\sigma_p(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |2^n\sigma_p(2^{-n})|^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{1}$$

то выборочные функции процесса $\xi(t)$ *непрерывны с вероятностью* 1 *на* $[0, 1]$ *и*

$$M\sup_{|s_1-s_2|<t} |\xi(s_1)-\xi(s_2)| \leqslant 2\sum_{2^{-n}\leqslant t} |2^n\sigma_p(2^{-n})|^{\frac{1}{p}}.$$

Б. *Пусть* $\sigma_2(t) = \dfrac{t}{\psi\left(\dfrac{1}{t}\right)}$, *где* $\psi(t)$ — *монотонная, медленно растущая на бесконечности функция. Если* $\sigma_2(t)$ *не удовлетворяет условию* (1), *то существует сепарабельный стационарный процесс* $\zeta(t)$ *с корреляционной функцией* $r(t)$ *такой, что*

$$r(0)-r(t) = O\left(\frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}\right),\ t\to 0,\quad P\{\sup_{t\in[0,1]}\zeta(t)=\infty\} = 1.$$

Отметим, что условие (1) выполняется, если для некоторого $\varepsilon>0$

$$\sigma_p(t) \leqslant \frac{ct}{|\ln t|^p\,|\ln|\ln t||^{p+\varepsilon}}.$$

Доказательство первой части теоремы 1 можно получить из общих результатов работы [1]. Здесь приведем простое доказательство, которое понадобится в дальнейшем.

Положим

$$S = \left\{\frac{k}{2^n},\ n\geqslant 1,\ 0\leqslant k\leqslant 2^n\right\},$$

$$\alpha_n = \sup_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|,\quad \alpha(t) = \sup_{|s_1-s_2|<t}|\xi(s_1)-\xi(s_2)|.$$

Пусть $s_1, s_2\in S$, $|s_1-s_2|<t$, $s_1<s_2$. Тогда существуют натуральные k, n такие, что $\frac{k}{2^n}\in[s_1, s_2]$, $2^{-n-1}\leqslant|s_2-s_1|<2^n$,

$$\xi(s_1) = \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)+\sum_{r\geqslant 1}\left[\xi\left(\frac{k}{2^n}-\sum_{i=1}^{r}\frac{\gamma_i}{2^{n+i}}\right)-\xi\left(\frac{k}{2^n}-\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\gamma_i}{2^{n+i}}\right)\right],$$

$$\xi(s_2) = \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)+\sum_{r\geqslant 1}\left[\xi\left(\frac{k}{2^n}+\sum_{i=1}^{r}\frac{\beta_i}{2^{n+i}}\right)-\xi\left(\frac{k}{2^n}+\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\beta_i}{2^{n+i}}\right)\right],$$

где $\gamma_i,\ \beta_i \in \{0, 1\}$, причем только конечное число их отлично от 0. Нетрудно видеть, что $|\xi(s_1)-\xi(s_2)| \leqslant 2\sum\limits_{2^{-n}\leqslant t}\alpha_n$. Из сепарабельности и стохастической непрерывности процесса $\xi(t)$ следует, что $\alpha(t) \leqslant 2\sum\limits_{2^{-n}\leqslant t}\alpha_n$. Так как $\alpha_n^p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{2^n}\left|\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right|^p$, то

$$M\alpha(t) \leqslant 2\sum_{2^{-n}\leqslant t}|M\alpha_n^p|^{\frac{1}{p}} \leqslant 2\sum_{2^{-n}\leqslant t}|2^n\sigma_p(2^{-n})|^{\frac{1}{p}},$$

причем выражение в правой части стремится к 0 при $t\to 0$.

Поэтому $P\{\lim\limits_{t\to 0}\alpha(t)=0\}=1$.

Для доказательства п. Б теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Если $\psi(t)$ — монотонная, медленно растущая на бесконечности функция и* $\varphi(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nt}{n^2\psi(n)}$, *то* $\varphi(t)=O\left(\frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}\right)$, $t\to 0$.

Доказательство.

$$\sum_{n<\frac{1}{t}}\frac{\sin^2 nt}{n^2\psi(n)} \leqslant t^2\int_0^{\frac{1}{t}}\frac{du}{\psi(u)} = O\left(\frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}\right),\quad t\to 0.$$

Справедливость этого соотношения вытекает из теоремы Карамата [2] о функции медленного роста, согласно которой $\int\limits_0^{\lambda}\frac{du}{\psi(u)}=O\left(\frac{\lambda}{\psi(\lambda)}\right)$, $\lambda\to\infty$.

Оценим оставшуюся часть ряда:

$$\sum_{n\geqslant\frac{1}{t}}\frac{\sin^2 nt}{n^2\psi(n)} \leqslant \int_{u\geqslant\frac{1}{t}}\frac{du}{u^2\psi(u)} \leqslant \frac{1}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}\int_{u\geqslant\frac{1}{t}}\frac{du}{u^2}=\frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)},$$

что и требовалось доказать.

Докажем вторую часть теоремы 1. Пусть $\sigma_2(t)$ не удовлетворяет условию (1).

Согласно теореме Коши, если $a_n\downarrow 0$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходятся или расходятся одновременно. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sigma_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right|^{1/2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\psi(n)}}=\infty.$$

Для построения процесса $\zeta(t)$ используем один из примеров работы [3]. Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, U, μ), где $\Omega=[0, 1]$ — пространство элементарных событий, U — σ-алгебра борелевских множеств на

$[0, 1]$, μ — мера Лебега на $[0, 1]$. Положим

$$\zeta_n = \sqrt{2}\cos 2\pi n\omega, \quad \zeta_n' = -\sqrt{2}\sin 2\pi n\omega,$$

$$\zeta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\psi(n)}}(\zeta_n \cos 2\pi nt + \zeta_n' \sin 2\pi nt).$$

Тогда $M\zeta_n\zeta_n' = M\zeta_n\zeta_i = M\zeta_n'\zeta_i' = 0$, $i \neq n$, $M\zeta_n^2 = M(\zeta_n')^2 = 1$. Нетрудно видеть, что

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\psi(n)}} \cos 2\pi n(t+\omega)$$

и ряд сходится с вероятностью 1 для каждого $t \in [0, 1]$ (см. [4], с. 16). Ясно, что процесс $\zeta(t)$ неограничен при $t = 1 - \omega$, так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\psi(n)}} = \infty$. Непосредственно проверяется, что

$$r(t) = M\zeta(t+s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi nt}{n^2\psi(n)}.$$

Применяя лемму 1, имеем $r(0) - r(t) = O\left(\frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}\right)$, $t \to 0$. Процесс $\zeta(t)$ сепарабелен, ибо $\zeta(t, \omega)$ непрерывен на $[0, 1-\omega-\varepsilon]$, $[1-\omega+\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{t\to 1-\omega} \zeta(t, \omega) = \zeta(1-\omega, \omega) = \infty$.

Замечание. Из теоремы 1 видно, что существует сепарабельный случайный процесс $\zeta(t)$, для которого

$$\sigma_2(t) \leqslant \frac{ct}{|\ln t \ln|\ln t||^2} \text{ и } P\{\sup_{t\in[0,1]} \zeta(t) = \infty\} = 1.$$

Теорема 2. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |2^{n(ap+1)}\sigma_p(2^{-n})|^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{2}$$

то выборочные функции процесса $\xi(t)$ удовлетворяют условию Липшица порядка a с вероятностью 1 и

$$M \sup_{|s_1-s_2|<t} \frac{|\xi(s_1)-\xi(s_2)|}{|s_1-s_2|^a} \leqslant 2\sum_{2^{-n}\leqslant t} |2^{n(ap+1)}\sigma_p(2^{-n})|^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Доказательство этого результата аналогично доказательству п. А теоремы 1.

Отметим, что в условиях (1), (2) имеет смысл рассматривать только случай $p > 1$, $a < \frac{p-1}{p}$, если это не выполняется, то единственным процессом, удовлетворяющим условиям (1), (2), является процесс $\xi(t) = \mathrm{const}$ с вероятностью 1 (см. [5]).

2. Перейдем к рассмотрению вопроса об отсутствии разрывов 2-го рода выборочных функций случайного процесса. Первое достаточное условие такого типа получено в работе [6].

Подробно этот вопрос рассмотрен в книге [7]. Предполагаемое нами условие усиливает ранее известные результаты и не может быть улучшено в общем случае.

Положим

$$\delta_p(t) = \sup_{\substack{s\in[0,1],\\ \pm t+s\in[0,1]}} M\,|(\xi(s+t)-\xi(s))(\xi(s)-\xi(s-t))|^{p/2},\ p\geqslant 1.$$

$$\Delta_c(f) = \sup\{\min(|f(t_1)-f(t_2)|,\,|f(t_2)-f(t_3)|;$$

$$t-c\leqslant t_1<t_2<t_3\leqslant t+c,\ t_1,t_2,t_3\in[0,1]\}+\sup\{|f(t)-f(0)|;$$

$$0<t<c\}+\sup\{|f(1)-f(t)|;\ 1-c<t<1\},$$

$D[0,1]$ — пространство вещественных функций на $[0, 1]$, не имеющих разрывов 2-го рода.

Теорема 3. А. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |2^n\delta_p(2^{-n})|^{1/p}<\infty,\quad p\geqslant 1, \tag{3}$$

то

$$P\{\xi(\cdot,\omega)\in D[0,1]\}=1,\quad M\Delta_c(\xi)\leqslant 2\sum_{n\geqslant\left[\lg_2\frac{1}{2c}\right]} |2^n\delta_p(2^{-n})|^{1/p}. \tag{4}$$

Б. *Пусть* $\xi(t)$ — *стационарный процесс с корреляционной функцией* $r(t)$ *такой, что*

$$r(t)=1-\frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}+o\left(\frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}\right),\quad t\to 0,$$

где $\psi(t)$ — *монотонная функция медленного роста на бесконечности. Если условие* (3) *не выполнено при* $p=2$, *то существует сепарабельный стационарный процесс* $\zeta(t)$ *с корреляционной функцией* $\tilde r(t)$ *такой, что*

$$1-\tilde r(t)=O\left(\frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}\right),\quad t\to 0,\quad P\{\sup_{t\in[0,1]}\zeta(t)=\infty\}=1.$$

Доказательство. А. В силу стохастической непрерывности процесса можно считать, что множеством сепарабельности $\xi(t)$ является множество $S=\left\{\frac{k}{2^n},\ n\geqslant 1,\ k=\overline{0,2^n}\right\}$. Из [7], лемма 2, с. 216, следует, что достаточно доказать неравенство (4), причем в определении величины $\Delta_c(\xi)$ можно предполагать, что t_1, t_2, t_3 изменяются на множестве S.

Пусть

$$\beta_{k,n}=\min\left(\left|\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right|,\ \left|\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right|\right),$$

$$\alpha_n=\max_{0<k<2^n}\beta_{k,n},\quad \zeta_{n,m}=\sum_{k=n}^{m}\alpha_k,\quad \zeta_n=\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k.$$

Лемма 2. *Для любых* n, m, κ *найдется целое* $j_{n,m}$, *что* $0\leqslant j_{n,m}<2^{m+1}$,

$$\max_{0\leqslant j\leqslant j_{n,m}}\left|\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k-1}{2^n}+\frac{j}{2^{n+m}}\right)\right|\leqslant\zeta_{n,m},$$

$$\max_{j_{n,m+1}\leqslant j\leqslant 2^{m+1}}\left|\xi\left(\frac{k-1}{2^n}+\frac{j}{2^{n+m}}\right)-\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right|\leqslant\zeta_{n,m}.$$

Лемма 3. *Если* $n = \left[\lg_2 \frac{1}{2c}\right]$, *то с вероятностью* 1

$$\Delta_c(\xi) \leqslant 2\zeta_n. \tag{5}$$

Для доказательства лемм 2, 3 достаточно повторить рассуждения леммы 4 из работы [7], с. 219. Заменой величины $g(T2^{-n})$ на α_n, $C = 1$, D_n превращается в достоверное событие, и делая соответствующие понятные изменения в доказательстве, получаем неравенство (5).

Доказательство п. А теоремы 3 вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$M\Delta_c(\xi) \leqslant 2 \sum_{n \geqslant \left[\lg_2 \frac{1}{2c}\right]} (M\alpha_n^p)^{1/p} \leqslant 2 \sum_{n \geqslant \left[\lg_2 \frac{1}{2c}\right]} \left(\sum_{k=1}^{2^n-1} M\beta_{k,n}^p\right)^{1/p} \leqslant 2 \sum_{n \geqslant \left[\lg_2 \frac{1}{2c}\right]} |2^n \delta_p(2^{-n})|^{1/p},$$

справедливость которой следует из (5) и элементарных неравенств

$$\beta_{k,n}^2 \leqslant \left|\xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right| \left|\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right|, \quad \alpha_n^p \leqslant \sum_{k=1}^{2^n-1} \beta_{k,n}^p.$$

Б. Пусть $\xi(t)$ — стационарный процесс, $r(t) = 1 - \frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)} + o\left(\frac{t}{\psi\left(\frac{1}{t}\right)}\right)$, $t \to 0$, то

$$M\,|(\xi(s+t) - \xi(s))(\xi(s) - \xi(s-t))| \leqslant \sigma_2(t).$$

Если $\delta_2(t)$ не удовлетворяет условию (3), то $\sigma_2(t)$ не удовлетворяет условию (1). Остается только применить п. Б теоремы 1.

Из следующей леммы вытекает, что при выполнении условия (3) процесс $\xi(t)$ в каждой фиксированной точке непрерывен с вероятностью 1.

Лемма 4. *Если выборочные функции стохастически непрерывного процесса* $\xi(t)$ *не имеют разрывов 2-го рода с вероятностью* 1, *то для любого* $t_0 \in [0, 1]$

$$P\{\lim_{t \to t_0} \xi(t) = \xi(t_0)\} = 1.$$

Доказательство непосредственно следует из существования величин $\xi(t_0 - 0)$, $\xi(t_0 + 0)$ и стохастической непрерывности процесса $\xi(t)$.

3. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс с непрерывными выборочными функциями. Найдем условия, аналогичные (1)—(3), при выполнении которых процесс $\xi(t)$ имеет непрерывно дифференцируемые выборочные функции.

Положим

$$d_p(t) = \sup_{\substack{s \in [0,1], \\ \pm t + s \in [0,1]}} M\,|\xi(s+t) + \xi(s-t) - 2\xi(s)|^p, \quad p \geqslant 1.$$

Теорема 4. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |2^{n(p+1)} d_p(2^{-n})|^{1/p} < \infty,$$

то выборочные функции процесса $\xi(t)$ *непрерывно дифференцируемы с вероятностью* 1 *и*

$$M \sup_{|s_1 - s_2| < t} |\xi'(s_1) - \xi'(s_2)| \leqslant 2 \sum_{2^{-n} \leqslant t} |2^{n(p+1)} d_p(2^{-n})|^{1/p} < \infty.$$

Доказательство этого утверждения может быть получено комбинацией доказательств теоремы 1 и соответствующего результата из [8], гл. 4.3.

В заключение выражаю глубокую признательность М. И. Ядренко, под руководством которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boulicaut B. Fonctions de Young et continuitè de trajectoires d'une fonction alèatoire.— Ann. Inst. Fourier, 1974, **24**, N 2, p. 27—47.
2. Karamata T. Sur un mode de croissance règuliere de fonctions.— Math. (Cluj), 1930, **4**, p. 38—53.
3. Jain N. C., Marcus M. B. Sufficient conditions for the continuity of stationary Gaussian processes and applications to random of functions.— Ann. Inst. Fourier, 1974, **24**, N 2, p. 117—141.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, М., «Мир», 1965. 615 с.
5. Ибрагимов И. А. Свойства реализаций случайных процессов и теоремы вложения.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, **18**, вып. 3, с. 468—480.
6. Ченцов Н. Н. Слабая сходимость случайных процессов с траекториями без разрывов второго рода и так называемый «эвристический» подход к критериям согласия типа Колмогорова — Смирнова.— Теория вероятностей и ее применения, 1956, **1**, вып. 1, с. 155—161.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. Т. 1, М., «Наука», 1971. 664 с.
8. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. М., «Мир», 1969. 394 с.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
17.IX. 1976 г.