УДК 517.917

И. П. Момот

О колебаниях в системах второго порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}+\lambda_i^2x_i=\varepsilon f_i\left(x_1, x_2, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right) \qquad (i=1, 2), \tag{1}$$

где λ_1, $\lambda_2>0$, ε — малый положительный параметр ($\varepsilon\in(0, \varepsilon_0]$), f_1 и f_2 — полиномы степени N относительно своих переменных, коэффициенты которых обозначим соответственно через $\alpha_{k_1k_2l_1l_2}$ и $\beta_{k_1k_2l_1l_2}$, где k_1, k_2, l_1, $l_2=0, 1, \ldots, N$ — показатели степени соответственно переменных x_1, x_2, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$.

В системе (1) выполним замену переменных, положив

$$x_i=a_i\sin\varphi_i, \quad \frac{dx_i}{dt}=a_i\lambda_i\cos\varphi_i \qquad (i=1, 2) \tag{2}$$

и считая a_1 и a_2 положительными. Относительно амплитуд a_1, a_2 и полных фаз φ_1, φ_2 получим систему уравнений

$$\frac{da_i}{dt}=\frac{\varepsilon}{\lambda_i}f_i(a_1\sin\varphi_1, a_2\sin\varphi_2, a_1\lambda_1\cos\varphi_1, a_2\lambda_2\cos\varphi_2)\cos\varphi_i=$$

$$=\varepsilon A_i(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2), \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt}=\lambda_i-\frac{\varepsilon}{a_i\lambda_i}f_i(a_1\sin\varphi_1, a_2\sin\varphi_2, a_1\lambda_1\cos\varphi_1, a_2\lambda_2\cos\varphi_2)\sin\varphi_i=$$

$$=\lambda_i+\varepsilon B_i(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) \qquad (i=1, 2).$$

В нерезонансном случае, усреднив правые части системы (3) по φ_1, φ_2 [1], получим уравнения первого приближения (в тех же обозначениях)

$$\frac{da_i}{dt}=\varepsilon A_i^0(a_1, a_2), \quad \frac{d\varphi_i}{dt}=\lambda_i+\varepsilon B_i^0(a_1, a_2) \qquad (i=1, 2), \tag{4}$$

где $A_i^0(a_1, a_2)=\overline{A}_i(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}A_i(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2$, $B_i^0=\overline{B}_i$ $(i=1, 2)$.

Пусть (a_1^0, a_2^0) — состояние равновесия амплитудных уравнений

$$\frac{da_i}{d\tau} = A_i^0(a_1, a_2), \quad \tau = \varepsilon t \qquad (i = 1, 2) \tag{5}$$

системы (4) и a_1, a_2 изменяются в области G_0, содержащей единственное состояние равновесия (a_1^0, a_2^0) системы (5), а G — область, полученная из G_0 образованием в точке (a_1^0, a_2^0) «дырки», радиусом ε_0. В области G зададим угловую переменную ψ, изменяющуюся по закону $\frac{d\psi}{d\tau} = \omega + \varepsilon H(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi)$, где $\omega \neq 0$ и H — функция вида A_i, B_i $(i = 1, 2)$, и докажем теорему.

Теорема 1. *Система уравнений* (3) *лишь тогда имеет гладкое инвариантное тороидальное многообразие*

$$a_i = \tilde{a}_i(\psi) + \varepsilon V_i(\varphi_1, \varphi_2, \psi, \varepsilon) \qquad (i = 1, 2) \tag{6}$$

с равномерно ограниченными при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *функциями* $V_i(\varphi_1, \varphi_2, \psi, \varepsilon)$, *когда* $a_i = \tilde{a}_i(\psi)$ $(i = 1, 2)$ — *периодическое решение уравнений первого приближения* (5).

Доказательство. Пусть выражение (6) определяет гладкий инвариантный тор системы (3). Тогда верно тождество

$$\left(\frac{d\tilde{a}_i}{d\psi} + \varepsilon\frac{\partial V_i}{\partial\psi}\right)(\varepsilon\omega + \varepsilon^2 H(\tilde{a}_1 + \varepsilon V_1, \tilde{a}_2 + \varepsilon V_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi)) +$$

$$+ \varepsilon\frac{\partial V_i}{\partial\varphi_1}(\lambda_1 + \varepsilon B_1(\tilde{a}_1 + \varepsilon V_1, \tilde{a}_2 + \varepsilon V_2, \varphi_1, \varphi_2)) + \varepsilon\frac{\partial V_i}{\partial\varphi_2}(\lambda_2 + \varepsilon B_2(\tilde{a}_1 + \varepsilon V_1,$$

$$\tilde{a}_2 + \varepsilon V_2, \varphi_1\varphi_2)) = \varepsilon A_i(\tilde{a}_1 + \varepsilon V_1, \tilde{a}_2 + \varepsilon V_2, \varphi_1, \varphi_2) \qquad (i = 1, 2). \tag{7}$$

Представляя уравнения системы (3) в нормальной форме [1], заключаем, что тождество (7) при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ возможно, лишь только

$$\frac{\partial V_i}{\partial\varphi_1}\lambda_1 + \frac{\partial V_i}{\partial\varphi_2}\lambda_2 = A_i(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \varphi_1, \varphi_2) - \omega\frac{d\tilde{a}_i}{d\psi} \qquad (i = 1, 2). \tag{8}$$

Учитывая нерезонансность частот λ_1 и λ_2, из соотношений (8) получаем равенства

$$\omega\frac{d\tilde{a}_1}{d\psi} = A_1^0(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2), \quad \omega\frac{d\tilde{a}_2}{d\psi} = A_2^0(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2), \tag{9}$$

правые части которых в области G одновременно не равняются нулю, т. е. из (9) всегда можно получить хотя бы одно из равенств

$$\frac{d\tilde{a}_1}{d\tilde{a}_2} = \frac{A_1^0(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)}{A_2^0(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)}, \quad \frac{d\tilde{a}_2}{d\tilde{a}_1} = \frac{A_2^0(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)}{A_1^0(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)},$$

которое и утвердит то, что $a_i = \tilde{a}_i(\psi)$ $(i = 1, 2)$ — решение системы (5). Поскольку выражение (6) — тор, то это решение периодическое. Теорема доказана.

Обсудим вопрос о возможности существования инвариантных тороидальных многообразий системы (1). Поскольку решение порождающей системы $(\varepsilon = 0)$ имеет вид $x_i = a_i \sin\varphi_i$ $(\varphi_i = \lambda_i t + \theta_i,\ i = 1, 2)$, то таким многообразием может быть двумерный тор в случае $a_i = \text{const}$ и трехмерный тор в случае зависимости a_1 и a_2 от одной и той же угловой переменной. В первом случае многообразие в переменных a_i, φ_i $(i=1, 2)$ имеет вид $a_i = a_i^0 + \varepsilon U_i(\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon)$, что следует из теоремы 6 работы [1], а во втором — это тор (6).

Таким образом, для существования квазипериодических решений системы (1), заполняющих инвариантные тороидальные многообразия, необходимо, чтобы система (5) имела периодические решения или хотя бы состояние равновесия.

Пусть в системе (1) $N = 4$. Тогда система (5) примет вид

$$\frac{da_1}{d\tau} = (\alpha_0 + \alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 a_2^2)\, a_1, \quad \frac{da_2}{d\tau} = (\beta_0 + \beta_1 a_1^2 + \beta_2 a_2^2)\, a_2, \tag{10}$$

где обозначено

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\,\alpha_{0010}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{8}(\alpha_{2010} + 3\alpha_{0030}\lambda_1^2), \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}(\alpha_{0210} + \alpha_{0012}\lambda_2^2),$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2}\,\beta_{0001}, \quad \beta_1 = \frac{1}{4}(\beta_{2001} + \beta_{0021}\lambda_1^2), \quad \beta_2 = \frac{1}{8}(\beta_{0201} + 3\beta_{0003}\lambda_2^2).$$

В конечной части области $a_1, a_2 > 0$ (область G_0) система (10) имеет состояние равновесия

$$a_1^0 = \sqrt{\Delta_1/\Delta}, \quad a_2^0 = \sqrt{\Delta_2/\Delta}, \tag{11}$$

где $\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$, $\Delta_1 = \alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2$ и $\Delta_2 = \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0$, если $\Delta \neq 0$ и выполняются неравенства

$$\frac{\Delta_1}{\Delta} > 0, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta} > 0. \tag{12}$$

Выясним вопрос о существовании замкнутых траекторий системы (10). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Система* (10) *имеет замкнутые траектории тогда и только тогда, когда для нее* $\Delta > 0$, *выполняются неравенства* (12) *и равенство*

$$\alpha_1\Delta_1 + \beta_2\Delta_2 = 0. \tag{13}$$

Эти траектории сплошь покрывают каждую четверть всей плоскости (a_1, a_2) *или внутренней части кривой*

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_0}a_1^2 + \frac{\beta_2}{\beta_0}a_2^2 + 1 = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Так как прямые $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$ — инвариантны, то достаточно рассмотреть вопрос о замкнутых траекториях в области G_0. В этой области сделаем замену переменных, положив

$$a_1^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta}e^x, \quad a_2^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}e^y. \tag{15}$$

Относительно новых переменных x и y получим систему уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = a(e^x - 1) + b(e^y - 1), \quad \frac{dy}{d\tau} = c(e^x - 1) + d(e^y - 1), \tag{16}$$

где $a = 2\alpha_1\Delta_1/\Delta$, $b = 2\alpha_2\Delta_2/\Delta$, $c = 2\beta_1\Delta_1/\Delta$ и $d = 2\beta_2\Delta_2/\Delta$.

При условии (12) в области G_0 преобразование (15) регулярное [2], следовательно, замкнутые траектории системы (10) переходят в замкнутые траектории системы (16). Положениям (11) отвечает начало координат O (0, 0), являющееся единственной точкой равновесия системы (16). В окрестности этой точки выделим линейные члены правых частей системы (16) и запишем характеристическое уравнение $r^2-(a+d)r+D=0$, где $D=ad-bc=4\Delta_1\ \Delta_2/\Delta$ $(D\neq 0)$.

Одновременно, рядом с системой (16) рассмотрим систему

$$\frac{dx}{d\tau}=[a(e^x-1)+b(e^y-1)]\,e^{px+qy}=X(x,y),$$
$$\frac{dy}{d\tau}=[c(e^x-1)+d(e^y-1)]\,e^{px+qy}=Y(x,y), \tag{17}$$

где $p=d(c-a)/D$, $q=a(b-d)/D$. Поскольку $\exp(px+qy)>0$, то системы (16) и (17) имеют одни и те же траектории с тем же направлением. Вычислим выражение

$$X'_x(x,y)+Y'_y(x,y)=(a+d)\,e^{px+qy}. \tag{18}$$

Если не выполняется равенство (13), то $a+d\neq 0$ и на всей плоскости $(x,\ y)$ выражение (18) знака не меняет и тождественно не равняется нулю, т. е. согласно критерию Бендиксона [2] система (17) (а с ней система (16) и (10)) не имеет замкнутых траекторий.

Если выполняется условие (13) и $\Delta<0$, то $a+d=0$ и $D<0$, следовательно, точка равновесия $O(0,\ 0)$ является седлом, а поскольку она единственна, то в плоскости $(x,\ y)$ (а значит, и в первой четверти плоскости $(a_1,\ a_2)$) согласно теореме Пуанкаре об индексе [2] замкнутые траектории отсутствуют.

Пусть теперь выполняется условие (13) и $\Delta>0$. Из соотношения (18) заключаем, что система (16) допускает интеграл. Используя его, покажем, что точка $O(0,\ 0)$ — центр системы (16). Удобно для этого привести систему (16) к каноническому виду, совершив линейное преобразование по формулам

$$x=au+(b-\lambda)v,\quad y=(c+\lambda)u-av, \tag{19}$$

где $\lambda=\sqrt{D}>0$. Преобразование (19) неособое, так как определитель матрицы его $\delta=\lambda(2\lambda-b+c)\neq 0$.

В новых переменных u и v получим систему уравнений

$$\frac{du}{d\tau}=-\lambda v+Q(u,v),\qquad \frac{dv}{d\tau}=\lambda u+P(u,v), \tag{20}$$

где функции $Q(u,v)$ и $P(u,v)$ имеют вид

$$Q(u,v)=\frac{\lambda}{\delta}[(c+\lambda)(e^{au+(b-\lambda)v}-1)-a(e^{(c+\lambda)u-av}-1)+\delta v],$$

$$P(u,v)=-\frac{\lambda}{\delta}[a(e^{au+(b-\lambda)v}-1)+(b-\lambda)(e^{(c+\lambda)u-av}-1)+\delta u].$$

Первый интеграл системы (20) при $a=0$ имеет вид:

$$\frac{e^{(c+\lambda)u}-(c+\lambda)u-1}{(c+\lambda)^2}+\frac{e^{(b-\lambda)v}-(b-\lambda)v-1}{(b-\lambda)^2}=C_1\geqslant 0$$

или в форме ряда

$$F(u,v)=u^2+v^2+2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(c+\lambda)^{k-2}u^k+(b-\lambda)^{k-2}v^k}{k!}=2C_1=C^2; \tag{21}$$

при $a+b=0$ (случай $a-c=0$ симметричный относительно влияния чисел b и c на систему)

$$\frac{e^{(c-a+\lambda)u+\lambda v}-(c-a+\lambda)u-\lambda v-1}{\lambda^2}+$$

$$+\frac{e^{-au+(a+\lambda)v}+au-(a+\lambda)v-1}{a^2}=C_1\geqslant 0$$

или

$$F(u,v)=u^2+v^2+2\sum_{k=3}^{\infty}\frac{a^2[(c-a+\lambda)u+\lambda v]^k+\lambda^2[-au+(a+\lambda)v]^k}{\lambda^2[a^2+(a+\lambda)^2]k!}=$$

$$=\frac{2a^2C_1}{a^2+(a+\lambda)^2}=C^2; \tag{22}$$

при $a\neq 0$, $a+b\neq 0$ и $a-c\neq 0$

$$e^{\frac{a}{\lambda}[(a+b-\lambda)u+(c-a+\lambda)v]}\left[1-\frac{a}{a+b}e^{au+(b-\lambda)v}-\frac{a}{a-c}e^{(c+\lambda)u-av}\right]=C_1 \tag{23}$$

или

$$F(u,v)=u^2+v^2+\frac{2}{\delta}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{\frac{a^{k-1}}{\lambda^{k-1}}[(a+b-\lambda)u+(c-a+\lambda)v]^k-\right.$$

$$\left.-\frac{(a+b)^{k-1}}{\lambda^{k-1}}[au+(c+\lambda)v]^k-\frac{(a-c)^{k-1}}{\lambda^{k-1}}[(b-\lambda)u-av]^k\right\}=C_2, \tag{24}$$

где

$$C_2=\frac{2\lambda}{a\delta}\left[C_1-\frac{\lambda^2}{(a+b)(a-c)}\right]. \tag{25}$$

Анализируя выражения (23) и (25), замечаем, что при любом наборе чисел a, b и c, удовлетворяющем неравенству $D>0$, в интеграле (24) $C_2=C^2\geqslant 0$.

Во всех случаях ((21), (22) и (24)) голоморфный интеграл $F(u, v)=C^2$ удовлетворяет тождеству

$$F'_u(u,v)[-\lambda v+Q(u,v)]+F'_v(u,v)[\lambda u+P(u,v)]=0,$$

а значит, удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова [3], гарантирующей то, что точка $O(0, 0)$ — центр. А так как преобразования (15) и (19) регулярные, то точка $C(a_1^0, a_2^0)$ — центр системы (10).

Выделим области первой четверти плоскости (a_1, a_2), заполненные замкнутыми траекториями. Кроме центра C и точки $O(0, 0)$, в конечной области еще могут быть точки равновесия $A_1(\sqrt{-\alpha_0/\alpha_1}, 0)$ и $A_2(0, \sqrt{-\beta_0/\beta_2})$, а в бесконечности (на экваторе сферы Пуанкаре) точка B оси Oa_1, точка E оси Oa_2 и точка F луча $a_2=a_1\sqrt{-\alpha_1\beta_0/\alpha_0\beta_2}$.

В трех частных случаях: 1) $\alpha_1=0$; 2) $\alpha_0=0$ и 3) $\beta_0=0$ точки O, B и E — седла, точки A_1, A_2 и F отсутствуют. Вся первая четверть плоскости (a_1, a_2) покрыта замкнутыми траекториями.

В общем случае $(\alpha_1\neq 0,\ \alpha_0\neq 0,\ \beta_0\neq 0)$ фазовый портрет системы (10) опишем в предположении, что $\alpha_1>0$ (случай $\alpha_1<0$ симметричный относительно влияния чисел α_0 и β_0 на систему).

При $\alpha_0>0$ и $\beta_0<0$ фазовый портрет совпадает с описанным выше.

При $\alpha_0<0$ и $\beta_0>0$ точки O, A_1 и A_2 — седла, точка F отсутствует, B и E — соединенные траекториями устойчивый и неустойчивый узлы. Поскольку интеграл системы имеет вид

$$a_1^{2p}a_2^{2q}\left(\cdots\frac{\alpha_1}{\alpha_0}a_1^2+\frac{\beta_2}{\beta_0}a_2^2+1\right)=C,$$

то седла A_1 и A_2 соединяет сепаратриса (14), являющаяся эллипсом. Точка C и замкнутые траектории лежат внутри эллипса (14).

При $\alpha_0\beta_0 > 0$, кроме точки F, есть еще два седла A_1 и B (или A_2 и E при других знаках α_0, β_0) точка A_2 (или A_1) отсутствует, точки O и E (или O и B) — соединенные траекториями устойчивый и неустойчивый узлы. Сепаратриса (14), соединяющая седла A_1 и F (или A_2 и F),— гипербола. Точка C и замкнутые траектории лежат внутри (по одну сторону с фокусом) гиперболы (14). Теорема доказана.

Учитывая изложенное выше и результаты, полученные в работе [1], сделаем выводы (для системы (1) при $N = 4$):

1) если $\Delta < 0$ или нарушается хотя бы одно из неравенств (12), то система не имеет квазипериодических решений, заполняющих инвариантные тороидальные многообразия;

2) если $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 > 0$ и не выполняется равенство (13), то система имеет квазипериодические решения, заполняющие двумерный инвариантный тор (результат, полученный в работе [1]), и не имеет квазипериодических решений, заполняющих трехмерный инвариантный тор;

3) случай $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 > 0$ и $\alpha_1 \Delta_1 + \beta_2 \Delta_2 = 0$ требует дополнительных исследований с привлечением для анализа высших приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. О квазипериодических колебаниях в нелинейных системах.— УМЖ, 1972, **24**, № 2, с. 179—194.
2. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., «Наука», 1966. 567 с. Авт. А, А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон и др.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1956. 472 с.

Хмельницкий технологический институт
бытового обслуживания

Поступила в редакцию 13.X. 1976 г.,
после переработки —18.IV. 1977 г.