УДК 519.44

З. И. Москаленко

К вопросу о локально компактной топологизации группы

В [1] поставлен следующий вопрос: пусть на группе G заданы две топологии T_1 и T_2, превращающие G в локально компактные топологические группы G_{T_1} и G_{T_2}, причем множества замкнутых подгрупп в этих группах совпадают. Являются ли группы G_{T_1} и G_{T_2} топологически изоморфными?

Впервые эту задачу поставил К. Росс. Р. Риккерт получил положительное решение для частных случаев, а решение вопроса в целом свел к случаю, когда связная компонента в каждой из групп G_{T_1} и G_{T_2} абелева [2].

В работе [3], посвященной данному вопросу, в лемме 2 неверно утверждается о равенстве топологий T_1 и T_2, в то время как это равенство не всегда справедливо, и можно говорить в общем случае лишь об изоморфизме топологий T_1 и T_2. Вследствие этого, доказательства последующих утверждений в работе [3] ошибочны. Об ошибке в [3] сообщил мне Ю. Н. Мухин, за что его благодарю.

В данной работе построен пример группы G, имеющей две неизоморфные локально компактные топологизации G_{T_1} и G_{T_2} с совпадающими множествами замкнутых подгрупп (в каждой из групп G_{T_1} и G_{T_2} связная компонента абелева). Таким образом, вопрос решается отрицательно.

Для случая не локально компактной топологизации вопрос решается отрицательно даже для абелевых групп, как показывает построенный ниже пример двух различных топологизаций бесконечной циклической группы с совпадающими множествами замкнутых подгрупп.

1. Построим пример группы G, допускающей две топологии T_1 и T_2, превращающие G в такие группы Ли G_{T_1} и G_{T_2}, что $G_{T_1} \not\cong G_{T_2}$ и множества замкнутых подгрупп группы G_{T_1} и группы G_{T_2} совпадают.

Пусть L—группа Ли, удовлетворяющая следующим условиям: $L = H \oplus F$, где $F = \{t_1 f_0\}$ — однопараметрическая подгруппа в L с параметром t_1, H— расширение одномерной векторной группы A_{T_1} с помощью двумерной векторной группы, т. е. $H = A_{T_1} + B + S$, где $A_{T_1} = \{t_2 a_0\}$, $B = \{t_3 b_0\}$,

$S=\{t_4 s_0\}$, — однопараметрические подгруппы в L с параметрами t_2, t_3, t_4 соответственно (a_0, b_0, s_0, f_0 — фиксированные ненулевые элементы подгрупп A_{T_1}, B, S и F соответственно), причем A_{T_1} — центральная подгруппа в H (а следовательно, и в L), и для произвольных вещественных чисел t_3, t_4 $[t_3 b_0, t_4 s_0]=t_3 t_4 a_0$.

Заметим, что топологический изоморфизм подгруппы A_{T_1} на одномерную векторную группу D задан отображением ζ: $A_{T_1}\to D$, где $\zeta(t_2 a_0)=t_2$ для произвольного вещественного t_2.

Очевидно, L — нильпотентная группа Ли; центр группы L равен $A_{T_1}\oplus F$; коммутант группы L равен A_{T_1}.

Рассмотрим подгруппу G группы L, порожденную подгруппой A_{T_1} и элементами b_0, s_0, $u_0=\lambda b_0+f_0$ (λ — иррациональное число). Через G обозначим абстрактную группу, а топологическую группу с топологией, индуцированной топологией группы L, обозначим через G_{T_1} (выше индекс T_1 дан для подгруппы A, но не дан для других подгрупп группы L, так как в данном примере существенна именно топологизация подгруппы A). Фактор-группа G_{T_1}/A_{T_1} дискретна в L/A_{T_1}, A_{T_1}—открытая локально компактная подгруппа в G_{T_1}; отсюда следует, что подгруппа G_{T_1} локально компактна, следовательно, она замкнута в L (замкнутость можно получить и из того, что G_{T_1} — полный прообраз замкнутой подгруппы G_{T_1}/A_{T_1} группы L/A_{T_1}). Следовательно, G_{T_1} — группа Ли. Связная компонента группы G_{T_1} равна A_{T_1}. Топология группы G_{T_1} полностью определяется топологией ее открытой подгруппы A_{T_1}, так как подгруппа A_{T_1} содержит полную систему окрестностей единицы группы G_{T_1} [4].

Зададим на G другую топологию T_2.

Заметим, что аддитивная группа действительных чисел, рассматриваемая как абстрактная группа, разложима в прямую сумму множества континуум подгрупп A_α, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел, где множество $M=\{a_\alpha\}$ ненулевых элементов $a_\alpha\in A_\alpha$, состоящее из элементов, взятых по одному из каждой подгруппы A_α, представляет собой максимальную систему действительных чисел, линейно независимых над полем Q рациональных чисел, причем в качестве множества M может быть взята произвольная максимальная система действительных чисел, линейно независимых над Q.

Выберем M так, что $M\supset 1$, $M\supset\lambda$. Очевидно, в M содержится действительное число μ, которое нельзя представить в виде $\dfrac{n_1+\lambda n_2}{m_1+\lambda m_2}$, где n_1, n_2, m_1, m_2 — целые числа.

Зададим отображение η подмножества $\widetilde{M}=Ma_0$ группы A в группу действительных чисел D так, что $\eta(\lambda a_0)=\mu$, $\eta(\mu a_0)=\lambda$, $\eta(\nu a_0)=\nu$ для произвольного ν из $M\setminus\{\lambda,\mu\}$ (в частности, $\eta(a_0)=1$). Отображение η определяет единственное изоморфное отображение η' абстрактной группы A на абстрактную группу D действительных чисел. Пусть T — естественная топология на D. Топологию, индуцируемую топологией T группы D с помощью отображения $\eta'^{-1}: D\to A$, обозначим через T_2, а соответствующую топологизацию группы A — A_{T_2}. Очевидно, $A_{T_2}\cong A_{T_1}\cong D$.

Пусть Σ — полная система окрестностей единицы в A_{T_2}. Σ удовлетворяет всем условиям полной системы окрестностей единицы относительно абстрактной группы G (см. [4]). На основании теоремы 9 [4], вносим в G топологию T_2 по полной системе окрестностей единицы Σ. Связная компонента единицы группы G_{T_2} равна A_{T_2}, фактор-группа G_{T_2}/A_{T_2} дискретна, следовательно, G_{T_2} — группа Ли.

Пусть M — подгруппа группы G, замкнутая в топологии T_1. Докажем, что она замкнута и в топологии T_2.

Возможны два случая: 1) $M \supset A$; 2) $M \not\supset A$.

Если $M \supset A$, то подгруппа M открыта в обеих топологиях T_1 и T_2, следовательно, она замкнута в топологии T_2.

Если $M \not\supset A$, то подгруппа $M \cap A$ дискретна в топологии T_1, следовательно, $M \cap A$ — нулевая подгруппа в A или бесконечная циклическая подгруппа в A. Но тогда подгруппа $M \cap A$ дискретна и в топологии T_2, т. е. подгруппа $M_{T_2} \cap A_{T_2}$ группы G_{T_2} дискретна.

Рассмотрим отображение τ подгруппы M_{T_2} в фактор-группу G_{T_2}/A_{T_2}. Вследствие дискретности фактор-группы G_{T_2}/A_{T_2}, τ — открытый гомоморфизм подгруппы M_{T_2} на подгруппу $M_{T_2}+A_{T_2}/A_{T_2}$ группы G_{T_2}/A_{T_2}. Вследствие теоремы 11 из [4], $M_{T_2}+A_{T_2}/A_{T_2} \cong M_{T_2}/M_{T_2} \cap A_{T_2}$ — дискретная группа. Следовательно, подгруппа M_{T_2} дискретна.

Аналогично можно доказать, что всякая подгруппа группы G, замкнутая в топологии T_2, замкнута и в топологии T_1.

Итак, множества замкнутых подгрупп в G_{T_1} и G_{T_2} совпадают. Допустим, что существует топологический изоморфизм ψ, отображающий G_{T_1} на G_{T_2}. Тогда $\psi(A_{T_1}) = A_{T_2}$, и изоморфизм ψ индуцирует изоморфизм ψ' фактор-группы G_{T_1}/A_{T_1} на фактор-группу G_{T_2}/A_{T_2}. Отсюда следует: $\psi(b_0) = \alpha_{11}b_0 + \alpha_{12}u_0 + \alpha_{13}s_0 + a_1$, $\psi(s_0) = \alpha_{21}b_0 + \alpha_{22}u_0 + \alpha_{23}s_0 + a_2$, $\psi(u_0) = \alpha_{31}b_0 + \alpha_{32}u_0 + \alpha_{33}s_0 + a_3$, где (α_{ij}) — целочисленная матрица, модуль определителя которой равен единице ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; a_1, a_2, a_3 — некоторые элементы подгруппы A).

Из определения изоморфного отображения следует: $\psi([b_0, s_0]) = [\psi(b_0), \psi(s_0)]$, $\psi([u_0, s_0]) = [\psi(u_0), \psi(s_0)]$, $[\psi(b_0), \psi(s_0)] = [\alpha_{11}b_0 + \alpha_{12}u_0 + \alpha_{13}s_0 + a_1, \alpha_{21}b_0 + \alpha_{22}u_0 + \alpha_{23}s_0 + a_2] = (p_1 + \lambda q_1)\,a_0$, где p_1, q_1 — целые числа. $[\psi(u_0), \psi(s_0)] = [\alpha_{31}b_0 + \alpha_{32}u_0 + \alpha_{33}s_0 + a_3, \alpha_{21}b_0 + \alpha_{22}u_0 + \alpha_{23}s_0 + a_2] = (p_2 + \lambda q_2)\,a_0$ (p_2, q_2 — целые числа). $[b_0, s_0] = a_0$; $[u_0, s_0] = \lambda a_0$. Отображение ψ индуцирует изоморфное отображение ψ'' группы A_{T_1} на группу A_{T_2}

$$\psi''(a_0) = \psi([b_0, s_0]) = (p_1 + \lambda q_1)\,a_0, \qquad \psi''(\lambda a_0) = \psi([u_0, s_0]) = (p_2 + \lambda q_2)\,a_0.$$

Рассматривая отображения ζ, η', ψ'' видим, что ζ и $\eta'\psi''$ — изоморфные отображения группы A_{T_1} на группу D с естественной топологией. Но тогда $\alpha = \eta'\psi''\zeta^{-1}$ — автоморфизм группы D. Для произвольного t из D (т. е. для произвольного вещественного числа t) $\alpha(t) = \alpha_0 t$, где α_0 — фиксированное ненулевое число. Отсюда получим: $\eta'\psi'' = \alpha\zeta$, $\alpha\zeta(a_0) = \alpha_0$, $\eta'\psi''(a_0) = \eta'((p_1 + \lambda q_1)\,a_0) = p_1 + \mu q_1$, следовательно, $\alpha_0 = p_1 + \mu q_1$. $\alpha\zeta(\lambda a_0) = \lambda\alpha_0$, $\eta'\psi''(\lambda a_0) = \eta'((p_2 + \lambda q_2)\,a_0) = p_2 + \mu q_2$, следовательно, $\lambda\alpha_0 = p_2 + \mu q_2$.

Отсюда следует: $\lambda(p_1 + \mu q_1) = p_2 + \mu q_2$, $\mu = \dfrac{p_2 - \lambda p_1}{\lambda q_1 - q_2}$, что противоречит выбору числа μ. Следовательно, предположение об изоморфности групп G_{T_1} и G_{T_2} неверно.

Итак, G_{T_1} и G_{T_2} — неизоморфные локально компактные топологизации одной группы G, такие, что множества замкнутых подгрупп в G_{T_1} и G_{T_2} совпадают.

Примечание. Пусть $G(\lambda)$ — расширение группы A_{T_1} с помощью дискретной свободной абелевой группы Q ранга 3, где A_{T_1} центрально в $G(\lambda)$, $Q = \{b_0\} \times \{s_0\} \times \{u_0\}$; $[b_0, s_0] = a_0$; $[b_0, u_0] = 0$; $[u_0, s_0] = \lambda a_0$.

Очевидно, $G_{T_1} \cong G(\lambda)$, $G_{T_2} \cong G(\mu)$. Так как существует множество I мощности континуум, состоящее из таких иррациональных чисел, что для любой пары чисел $\lambda \in I$, $\mu \in I$, $\mu \neq \dfrac{n_1 + \lambda n_2}{m_1 + \lambda m_2}$, то на G существует континуум локально компактных топологий $\tau_i : i \in I$ с одним и тем же множеством замкнутых подгрупп и попарно неизоморфными топологическими группами G_{τ_i}.

2. Приведем пример абелевой группы, для которой существуют различные не локально компактные топологизации с совпадающими множествами замкнутых подгрупп.

Пусть G — бесконечная циклическая группа, a — ее образующий элемент.

Пусть λ_1, λ_2 — такие иррациональные числа из интервала (0, 1), что никакая их целочисленная линейная комбинация не является рациональным числом.

Каждую из топологизаций G_{T_i} $(i=1,2)$ получим вложением группы G в группу K вращений окружности, при котором элементу a ставится в соответствие λ_i $(i=1,2)$. Топология T_i группы G индуцируется естественной топологией группы K.

Пусть F_{T_i} — ненулевая замкнутая подгруппа группы G в топологии T_i $(i=1,2)$, f — произвольный элемент из F_{T_i}, $f=p\lambda_i\,(\mathrm{mod}\,1)$, где p — некоторое целое число. Циклическая подгруппа, порожденная элементом $p\lambda_i\,(\mathrm{mod}\,1)$, всюду плотна в K, а следовательно, и в G_{T_i}, и $F_{T_i}=G_{T_i}$.

Итак, либо $F_{T_i}=G_{T_i}$, либо $F_{T_i}=0$ $(i=1,2)$. Следовательно, множества замкнутых подгрупп в G_{T_1} и G_{T_2} совпадают.

Предположим, что группы G_{T_1} и G_{T_2} топологически изоморфны и существует изоморфное отображение φ: $G_{T_1}\to G_{T_2}$.

Очевидно, $\varphi(\lambda_1)=\mu\lambda_2$, где $\mu=\pm 1$.

Для произвольной ε-окрестности V_ε нуля в G_{T_2} существует такая δ-окрестность U_δ нуля в G_{T_1}, что из включения $n\lambda_1\,(\mathrm{mod}\,1)\in U_\delta$ следует: $\varphi(n\lambda_1)\,(\mathrm{mod}\,1)\in V_\varepsilon$, т. е. $\mu n\lambda_2\,(\mathrm{mod}\,1)\in V_\varepsilon$.

Пусть $\varepsilon=\frac{1}{4}$. Данному значению ε соответствует $\delta=\delta_0$. Вследствие выбора чисел λ_1 и λ_2, для произвольного двумерного вектора (b_1, b_2) существует такое целое число n, что координаты вектора $n(\lambda_1,\mu\lambda_2)$ по модулю 1 отличаются от координат вектора (b_1, b_2) не более чем на α (α — наперед заданное как угодно малое положительное число). Следовательно, можно подобрать n так, что $n\lambda_1\,(\mathrm{mod}\,1)\in U_{\delta_0}$, $n\mu\lambda_2\,(\mathrm{mod}\,1)\notin V_{\frac{1}{4}}$.

Данные выражения противоречат непрерывности отображения φ. Следовательно, группы G_{T_1} и G_{T_2} не изоморфны как топологические группы.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. П. Платонову и О. В. Мельникову за внимание к результатам работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коуровская тетрадь. Новосибирск, Изд-во АН СССР, 1973, с. 48.
2. Rickert N. W. Locally compact topologies for groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1967, 126, 2, p. 225.
3. Москаленко З. И., Матусов И. Б. Об однозначности задания локально компактной топологии на группе системой замкнутых подгрупп.— Докл. АН УССР. Сер. А. 1976, № 2, с. 115—117.
4. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954. 515 с.

НИКТИ городского хозяйства
МКХ УССР

Поступила в редакцию
25.VI. 1976 г.