УДК 517.928

И. И. Старун

Асимптотическое представление решений линейных дифференциальных систем, содержащих малый параметр

1. В данной работе рассматривается система

$$\varepsilon^h \dot{x} = A(t, \varepsilon)\, x, \tag{1}$$

где $h \geqslant 1$ — целое число, матрица $A(t, \varepsilon)$ обладает асимптотическим разложением вида

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A^{(s)}(t) \tag{2}$$

в области $|t| \leqslant t_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0 < 1$. Такая система рассматривалась в работах многих авторов как при $h = 1$, так и при $h > 1$ (см., например, [1 — 8]) при различных предположениях относительно корней характеристического уравнения

$$\det \| A^{(0)}(t) - wE \| = 0. \tag{3}$$

Если уравнение (3) имеет простые корни, то подобно [3, 4] (при $h=1$), решение системы (1) можно построить в виде

$$X(t, \varepsilon) = U(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda(\tau, \varepsilon)\, d\tau\right) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s U^{(s)}(t)\right) \times$$

$$\times \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Lambda^{(s)}(\tau)\, d\tau\right) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q^{(s)}(t)\right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \sum_{s=0}^{h-1} \varepsilon^s \Lambda^{(s)}(\tau)\, d\tau\right) =$$

$$= Q(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \sum_{s=0}^{h-1} \varepsilon^s \Lambda^{(s)}(\tau)\, d\tau\right), \tag{4}$$

где матрица $Q(t, \varepsilon)$ при $|t| \leqslant t_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и ε, принадлежащему некоторому сектору S, имеет равномерное по t асимптотическое разложение

$$Q(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q^{(s)}(t) \tag{5}$$

с аналитическими в указанной области коэффициентами $Q^{(s)}(t)$; $\Lambda^{(s)}(t)$ тоже аналитические при $|t| \leqslant t_0$ (см. [2]) (условия, налагаемые на матрицы $A^{(s)}(t)$, указаны в п. 2). Если уравнение (3) имеет кратный корень и ему соответствуют кратные элементарные делители, то вид решения более сложен чем (4) и метод построения его довольно громоздок (см. [3. 8]). В этой работе показано, что можно построить такие преобразования, которые позволяют сводить случай кратного корня, которому соответствуют кратные элементарные делители, к случаю простых корней.

Заметим, что матрицу $A^0(t)$ в (1) можно считать имеющей каноническую форму $W(t)$ (диагональную или жорданову), ибо в противном случае, сделав в (1) неособенное преобразование $x = P(t)\, y$ $(P^{-1}(t) \times \times A^{(0)}(t) P(t) = W(t))$, придем к системе

$$\varepsilon^h \dot{y} = (W(t) + \varepsilon B(t, \varepsilon))\, y = \left(W(t) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s B^{(s)}(t)\right) y,$$

в которой $B^{(s)}(t)=P^{-1}(t)A^{(s)}(t)P(t)$, $s=1,2,\ldots,h-1$, $h+1,\ldots$, $B^{(h)}(t)=P^{-1}(t)A^{(h)}(t)P(t)-P^{-1}(t)\dot{P}(t)$.

Существование матрицы $P(t)$ и ее аналитичность следует из [3, 4] в силу предположений, сделанных относительно $A^{(0)}(t)$.

2. Пусть в системе (1) матрица $A^{(0)}(t)$ имеет вид

$$A^{(0)}(t)=W(t)=\operatorname{diag}\{w_1(t),\ldots,w_n(t)\},\quad w_i(t)\neq w_j(t),\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Тогда имеет место теорема.

Теорема. *Если*: 1) *матрицы* $A^{(s)}(t)$, $s=0,1,\ldots$ *аналитичны при* $|t|\leqslant t_0$; 2) $A(t,\varepsilon)$ *имеет асимптотическое разложение* (2) *в области* $|t|\leqslant t_0$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0<1$; 3) *матрица* $A^{(0)}(t)$ *имеет вид* (6), *то при* $|t|\leqslant t_0$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$, $\varepsilon\in S$ (S — *некоторый сектор*) *система* (1) *имеет фундаментальную матрицу решений вида* (4).

Доказательство теоремы не приводим в силу полной аналогии со случаем $h=1$, подробно изложенным, например, в [4]. Заметим, что асимптотический характер указанного решения следует из [2], гл. VII, теорема 26.3.

3. Пусть матрица $A^{(0)}(t)$ в (1) имеет вид

$$A^{(0)}(t)=W(t)=w(t)E+I, \tag{7}$$

где

$$I=(\beta_{ij}),\ \beta_{ij}=\begin{cases}0, & j\neq i+1,\\ 1, & j=i+1,\end{cases}\quad i,j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

E — единичная матрица. При помощи замены

$$x=y\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t w(\tau)\,d\tau\right) \tag{9}$$

от системы (1) придем к системе

$$\varepsilon^h\dot{y}=\left(I+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s A^{(s)}(t)\right)y. \tag{10}$$

К системе (10) применим преобразование

$$y=Lz, \tag{11}$$

где

$$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \varepsilon^{\rho} & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon^{(n-1)\rho}\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тогда, так как $L^{-1}IL=\varepsilon^{\rho}I$, $L^{-1}A^{(s)}(t)L=\sum_{i=1}^{2n-1}\varepsilon^{(i-n)\rho}A_i^{(s)}(t)$,

$$A_1^{(s)}(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_{n1}^{(s)}(t) & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix},\quad A_2^{(s)}(t)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_{n-1\,1}^{(s)}(t) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_{n2}^{(s)}(t) & \ldots & 0\end{pmatrix},\ldots$$

$$\ldots, A_{2n-1}^{(s)}(t) = \begin{pmatrix} 0, & \ldots & 0 & a_{1n}^{(s)}(t) \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

то

$$\varepsilon^h \dot{z} = \left(\varepsilon^\rho I + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{i=1}^{2n-1} \varepsilon^{(i-n)\rho} A_i^{(s)}(t)\right) z. \tag{14}$$

Пусть матрица $A^{(1)}(t) \neq 0$. Тогда, если $a_{n1}^{(1)}(t) \neq 0$, $|t| \leqslant t_0$, то, полагая $\rho = 1/n$, $\mu = \varepsilon^{1/n}$, (после деления на μ) приходим к системе

$$\mu^{(n-1)h} \dot{z} = (I + A_1^{(1)}(t) + \mu B(t, \mu)) z, \tag{15}$$

где

$$B(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k B^{(k)}(t) = \sum_{i=2}^{2n-1} \mu^{i-2} A_i^{(1)}(t) + \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n-1} \mu^{n(s-1)+i-2} A_i^{(s)}(t). \tag{16}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее системе (15), имеет вид

$$\det \| I + A_1^{(1)}(t) - \lambda E \| = \lambda^n - a_{n1}^{(1)}(t) = 0 \tag{17}$$

и имеет n различных корней $\lambda_k = \sqrt[n]{|a_{n1}^{(1)}(t)|} \exp\left(\dfrac{\arg a_{n1}^{(1)}(t) + 2k\pi}{n}\right)$, $k = \overline{1, n}$. Поэтому существует неособенное преобразование

$$z = P(t) u, \tag{18}$$

приводящее систему (15) к виду

$$\mu^{(n-1)h} \dot{u} = (\Lambda(t) + \mu H(t, \mu)) u, \tag{19}$$

где

$$\Lambda(t) = P^{-1}(t)(I + A_1^{(1)}(t)) P(t), \qquad H(t, \mu) = P^{-1}(t) B(t, \mu) P(t).$$

А к системе (19) применима сформулированная теорема. Если же $a_{n1}^{(1)}(t) \equiv 0$, но

$$a_{n-11}^{(1)}(t) + a_{n2}^{(1)}(t) \neq 0, \ |t| \leqslant t_0, \tag{20}$$

то полагаем $\rho = \dfrac{1}{n-1}$, $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$ и приходим к системе типа (15) с характеристическим уравнением

$$\det \| I + A_2^{(1)}(t) - \lambda E \| = \lambda^n - \lambda (a_{n-11}^{(1)}(t) + a_{n2}^{(1)}(t)) = 0, \tag{21}$$

корни которого тоже различны.

Заметим, что условия (14), (20) совпадают с условиями, приведенными в [4] (см. теоремы 4.2, 4.5).

4. Предположим, что матрица $A^{(0)}(t)$ в (1) имеет вид

$$A^{(0)}(t) = W(t) = w(t) E + I = w(t) E + \{I_1, \ldots, I_p\}, \tag{22}$$

где E — единичная $n \times n$-матрица, I_i, $i = \overline{1, p}$, — матрицы вида (8) размерностей r_i $\left(\sum_{i=1}^{p} r_i = n\right)$. Преобразование (9) и в этом случае уничтожает элемент $w(t) E$, оставляя остальные без изменений, поэтому будем считать такое преобразование выполненным, т. е. будем рассматривать систему (10) с матрицей I вида (22). Рассмотрим, по аналогии с [4, 7], более подробно случай, когда

$$r_1 = \ldots = r_p \quad (pr_1 = n). \tag{23}$$

Применяя снова преобразование (11) с матрицей L вида

$$L = \{L_1, \ldots, L_p\}, \tag{24}$$

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon^\rho & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon^{(r_i-1)\rho} \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{1, p}, \tag{25}$$

приходим к системе (14) с матрицей $A_1^{(1)}(t)$ вида

$$A_1^{(1)}(t) = (A_{ks}(t))_1^p, \quad A_{ks}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{kr_1, (s-1)r_1+1}(t) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Если теперь матрица $A_1^{(1)}(t)$ такова, что уравнение

$$\det \| I + A_1^{(1)}(t) - \lambda E \| = 0 \tag{27}$$

имеет только различные корни, то полагаем $\rho = \frac{1}{r_1}$, $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{r_1}}$ и приходим к системе, к которой применима теорема. Отметим, что условие, при котором уравнение (27) имеет все различные корни, эквивалентно условиям (15), (16) из [9]. Изложенный метод применим и в случае, когда r_i, $i = \overline{1, p}$, не удовлетворяет условию (23). Однако в этом случае выбор ρ не однозначен, можно полагать $\rho = \frac{1}{r_i}$, $i = \overline{1, p}$, выбирая именно то, при котором уравнение (27) имеет различные корни.

5. В качестве примера рассмотрим систему (см. [4], § 25)

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{z} + p(t) y &= 0, \\ \varepsilon \ddot{y} + q(t) z &= 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Замена $z = x_1$, $\varepsilon\dot{z} = x_2$, $y = x_3$, $\varepsilon\dot{y} = x_4$ приводит к системе

$$\varepsilon\dot{x} = (I - \varepsilon A(t))\, x, \tag{29}$$

в которой

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q(t) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Преобразование $x = Lu$, где

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^\rho \end{pmatrix}, \tag{31}$$

приводит к системе

$$\varepsilon\dot{u}=(\varepsilon^{\rho}I-\varepsilon^{1-\rho}A(t))\,u. \qquad (32)$$

Полагая $\rho=\frac{1}{2}$, $\mu=\sqrt{\varepsilon}$, получаем систему

$$\mu\dot{u}=(I-A(t))\,u, \qquad (33)$$

характеристическое уравнение которой имеет вид $\lambda^4-p(t)\,q(t)=0$. Отсюда следует, что если $p(t)\neq 0$, $q(t)\neq 0$ (условия те же, что и в [4]), то к системе (33) применима теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Территин Х. Л. Асимптотическое разложение решений систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Математика, 1957, № 2, с. 29—59.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968. 462 с.
3. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. К., «Наук. думка», 1966. 251 с.
4. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. К., «Вища школа», 1971. 226 с.
5. Моисеев Н. И. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969. 379 с.
6. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. М., «Наука», 1973. 431 с.
7. Старун И. И. Об асимптотическом поведении решений систем линейных дифференциальных уравнений. Автореф. канд. дис., К., 1969. 18 с.
8. Григоренко В. К. Об асимптотическом разложении решений систем линейных дифференциальных уравнений. Автореф. канд. дис., К., 1972. 16 с.
9. Старун И. И. О приведении систем линейных дифференциальных (разностных) уравнений к L-диагональному (l-диагональному) виду.— В кн.: Труды семин. по мат. физике и нелинейн. колеб., К., Ин-т математики АН УССР, 1969, вып. 3, с. 289—302.

Гомельский
государственный университет

Поступила в редакцию
10.X. 1977 г.