УДК 517.944

*Н. Н. Чаус*

# Об асимптотике решений уравнений в частных производных с переменными коэффициентами

В данной заметке обобщается результат, полученный в [1], на случай более общих уравнений и более широкого класса областей, в которых решения рассматриваются.

Рассмотрим уравнение

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right) u = P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u, \tag{1}$$

где $Q = Q\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ — дифференциальное выражение от $\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_k}$, $\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ с постоянными коэффициентами, а $P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = P$ имеет вид:

$$P = a_0 \frac{\partial^p}{\partial x^p} + a_1(x) \frac{\partial^{p-1}}{\partial x^{p-1}} + \ldots + a_p(x).$$

Предполагается, что $a_0 = \text{const} \neq 0$, а коэффициенты $a_i(x)$ непрерывны и допускают при $x > 0$ оценки: $|a_i(x)| \leqslant Ax^{\alpha_i}$ $(A, \alpha_i \geqslant 0)$. Решения $u(x, t, y)$ уравнения (1) предполагаем определенными в области $G: x > 0, 0 \leqslant t_i \leqslant 1$, $-\infty < y_j < \infty$ $(1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant n)$. В этих условиях покажем, что два решения уравнения (1), ведущие себя одинаково на бесконечности, тождественно равны. Для точной формулировки результата введем для $Q$ характеристику $r(\lambda)$. Если $Q = Q_0 = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial t_k}\right)^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{j_n}$, то положим для $\lambda > 0$ $r(\lambda) = i_1 + \dots + i_k + \lambda(j_1 + \dots + j_n)$. Если $Q$ состоит из $N$ слагаемых вида $Q_0$, то для каждого из слагаемых подсчитаем $i_1 + \dots + i_k + \lambda(j_1 + \dots + j_n)$ и среди полученных $N$ чисел наибольшее будет, по определению, $r(\lambda)$. После этого обозначим для $q > 1$ $R_q = \frac{1}{p} r\left(1 - \frac{1}{q}\right)$.

Теорема. *Если $q > 1$ такое, что $R_q < 1$, и решение уравнения* (1) *удовлетворяет в области $G$ условиям:*

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right| \leqslant C \exp\{-x^{q_1+\varepsilon} + a\|y\|^q\} \quad (i = 0, 1, \dots, p-1),$$

*где $C, a, \varepsilon > 0$, $\|y\|^2 = \sum_j |y_j|^2$, $q_1 = \max\left\{\frac{1}{1-R_q}, \frac{1+\alpha_1}{p(1-R_q)}, 1+\alpha_1, 1 - \alpha_1 + \alpha_2, \dots, 1 - \alpha_{p-1} + \alpha_p\right\}$, то $u(x, t, y) \equiv 0$ в $G$.*

Доказательство проведем для случая одномерных $t$ и $y$. Обозначим через $\Phi_{q,b}$ $(q > 1, b > 0)$ пространство бесконечно дифференцируемых на всей оси функций $\varphi(y)$, для которых

$$|\varphi^{(n)}(y)| \leqslant C_\varphi C^n n^{\left(1-\frac{1}{q}\right)n} \exp\{-b|y|^q\} \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Известно [2], что такие $\varphi(y)$ существуют и их достаточно много.

Обозначим через $\Omega_\delta$ пространство функций $\omega(t) \in C_0^\infty(0, 1)$, для которых $|\omega^{(n)}(t)| \leqslant Cn^{(1+\delta)n}$ $(n = 0, 1, \dots)$. Такие $\omega(t)$ существуют и их тоже достаточно много (см. [3]).

Пусть теперь $u(x, t, y)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию теоремы. Взяв $\varphi(y) \in \Phi_{q,b}$ $(b > a)$ и $\omega(t) \in \Omega_\delta$, введем в рассмотрение функцию

$$f(x) = (u, \varphi(y)\omega(t)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 u(x, t, y)\,\omega(t)\,\varphi(y)\,dt dy.$$

Понятно, что $f^{(i)}(x) = \left(\frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \varphi(y)\omega(t)\right)$ $(i = 0, 1, \dots, p-1)$. Докажем, что $Pf(x) = (u, Q^+\varphi(y)\omega(t))$, где $Q^+$ — формально сопряженное выражение к $Q$. Для этого рассмотрим последовательность функций $f_m(x): f_m(x) = (u, \varphi_m(y)\omega(t))$, где $\varphi_m(y) = \varphi(y)\xi\left(\frac{1}{m}y\right)$ с бесконечно дифференцируемой финитной функцией $\xi(\lambda)$ со свойством: $\xi(\lambda) \equiv 1$ при $|\lambda| < 1$. Понятно, что $f_m^{(i)}(x) = \left(\frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \varphi_m(y)\omega(t)\right)$ $(i = 0, 1, \dots, p-1)$, $Pf_m(x) = (u, Q^+\varphi_m(y)\omega(t))$ и имеется равномерная сходимость $f_m^{(i)}(x)$ к $f^{(i)}(x) = \left(\frac{\partial^i u}{\partial x^i}, \varphi\omega\right)$ и $Pf_m(x)$ к $(u, Q^+\varphi\omega)$. Так как на каждом конечном промежутке изменения $x$

$a_i(x) f_m^{(i)}(x)$ тоже равномерно сходятся к $a_i(x) f^{(i)}(x)$, то из предыдущего следует, что последовательность

$$f_m^{(p)}(x) = Pf_m(x) - \sum_{i-0}^{p-1} a_i(x) f_m^{(i)}(x)$$

тоже равномерно сходится. Отсюда получаем:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{d}{dx} f_m^{(p-1)}(x) = (u, Q^+\varphi\omega) - \sum_{i=0}^{p-1} a_i(x) f^{(i)}(x) = f^{(p)}(x),$$

что и требовалось установить.

Этим показано, что к $f(x)$ применима любая степень $N = 0, 1, \ldots$ выражения $P$ и $P^N f(x) = (u, Q^{+N} \varphi(y, \omega(t))$. Отсюда для $|P^N f(x)|$ можно получить оценку вида:

$$|P^N f(x)| \leqslant M_N \exp\{-x^{q_1+\varepsilon}\},$$

где последовательность $M_N$ будет определяться оценками, имеющимися на $\varphi^{(n)}(y)|$ и $|\omega^{(n)}(t)|$, и порядками производных по $t$ и по $y$, входящими в выражение $Q^{+N}$. Для простого случая, когда $Q = \frac{\partial^{i+i}}{\partial t^i \partial y^i}$, имеем:

$$\| P^N f(x) | \leqslant |(u, \varphi^{(Nj)}(y) \omega^{(Ni)}(t) | \leqslant C^N N^{(1+\delta)N\left[i+j\left(1-\frac{1}{q}\right)\right]} \exp\{-x^{q_1+\varepsilon}\}.$$

В случае общего $Q$ можно написать, что

$$|P^N f(x)| \leqslant C^N N^{(1+\delta)\left[i_N + j_N\left(1-\frac{1}{q}\right)\right]} \exp\{-x^{q_1+\varepsilon}\},$$

где $\frac{\partial^{i_N+j_N}}{\partial t^{i_N} \partial y^{j_N}}$ — «наиболее неблагоприятное» слагаемое, входящее в $Q^{+N}$. Понятно, что при этом $i_N + j_N\left(1 - \frac{1}{q}\right) = Nr\left(1 - \frac{1}{q}\right) = N\mathrm{p}R_q$ и, следовательно, в случае общего $Q$ имеем:

$$|P^N f(x)| \leqslant C^N N^{(1+\delta)pNR_q} \exp\{-x^{q_1+\varepsilon}\}.$$

Очевидно, что такую же оценку имеет и $\left|\frac{d^i}{dx^i} P^N f(x)\right|$ $(i = 1, \ldots, p-1)$. Отметим, что в полученных оценках $\delta > 0$ можно считать достаточно малым по сравнению с $\varepsilon > 0$, фиксируемым теоремой. В результате связь между убыванием величины $\left|\frac{d^i}{dx^i} P^N f(x)\right|$ при $x \to \infty$ и ростом ее при $N \to \infty$ оказывается такой, что $f(x) \equiv 0$ [1, теорема 2]. Таким образом, доказано, что $(u(x, t, y), \varphi(y)\omega(t)) = 0$ при всех $\varphi(y) \in \Phi_{q,b}$ и $\omega(t) \in \Omega_\delta$, откуда $u(x, t, y) \equiv 0$. Теорема доказана.

В заключение укажем на некоторые из работ [4—9], в которых также устанавливались оценки на решения специальных уравнений или систем в бесконечных областях, из которых следовала тривиальность решений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чаус Н. Н. О несуществовании быстро убывающих решений в полуполосе. — УМЖ, 1976, 28, № 2, с. 213—221.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 2. М., Физматгиз, 1958. 362 с.

3. Мандельбройт С. Квазианалитические классы функций. Л. — М., ОНТИ, 1937. 107 с.
4. Эйдельман С. Д. Теоремы типа Лиувилля для параболических и эллиптических систем. — ДАН СССР, 1954, 99, № 5, с. 681—684.
5. Ландис Е. М. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. — ДАН СССР, 1956, 107, № 5, с. 640—643.
6. Аршон И. С., Пак М. А. Теоремы единственности для гармонических функций в полупространстве. — Мат. сб., 1965, 68, № 1, с. 148—151.
7. Дехтярюк Є. С. Асимптотичні теореми єдиності розв'язку системи диференціальних рівнянь у півпросторі. Допов. АН УРСР. Сер. А, 1969, № 12, с. 1069—1073.
8. Ландис Е. М. Об одной теореме типа Фрагмена — Линделефа для решений эллиптических уравнений. — УМН, 1975, 30, вып. 5, с. 213.
9. Гусаров А. Л. О точной лиувиллевой теореме для решений параболического уравнения на характеристике. — Мат. сб., 1975, 97, № 3, с. 379—394.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
4.V. 1976 г.