УДК 519.48

П. С. Казимирский, Ф. П. Луник

Дополнение прямоугольной обратной над ассоциативным кольцом матрицы до обратимой

В данной работе даются необходимые и достаточные условия дополняемости матрицы A с размером $m\times n$ $(m<n)$ с элементами из ассоциативного кольца R с единицей, удовлетворяющей условию $AB=E^m$ (E^m — единичная матрица порядка m) до обратимой над R матрицы.

Теорема 1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и*

$$AB=E^m,\quad A=(a_{ik})_{m,n},\quad B=(b_{ik})_{n,m},\quad a_{ik},\ b_{ik}\in R,\quad m<n. \tag{1}$$

Чтобы матрицу A можно было дополнить до обратимой над R матрицы, необходимо и достаточно, чтобы модуль $A:0$ был свободным $n-m$-членным правым R-модулем.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что матрица $X=(x_{ik})_{n-m,n}$, $x_{ik}\in R$, такая, что матрица $\begin{pmatrix}A\\X\end{pmatrix}$ — обратимая, т. е. имеет место соотношение

$$(BY)\begin{pmatrix}A\\X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\X\end{pmatrix}(BY)=E^n, \tag{2}$$

где $Y=(y_{ik})_{n,n-m}$, $y_{ik}\in R$.

Столбцы $(y_{1k}y_{2k}\ldots y_{nk})^T$ матрицы Y принадлежат, очевидно, к правому R-модулю $A:0$. В силу соотношения (2) Y — базисная матрица этого модуля, т. е.

$$\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_n\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n-m}\begin{pmatrix}y_{1k}\\y_{2k}\\\vdots\\y_{nk}\end{pmatrix}x_k, \tag{3}$$

где $(r_1r_2\ldots r_n)^T\in A:0$.

---

* $A:0$ — совокупность $n\times1$-матриц с элементами из R, аннулируемыми справа (в смысле матричного умножения) матрицу A.

Таким образом, модуль $A:0$ — $n-m$-членный правый R-модуль с базисной матрицей Y.

Покажем, что модуль $A:0$ свободный, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n-m}\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{nk} \end{pmatrix}\alpha_k=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n-m}=0, \quad \alpha_k\in R. \tag{4}$$

Действительно, левую часть соотношения (4) можно записать в виде

$$Y\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } Y=(y_{ik})_{n,n-m}. \tag{5}$$

Умножая (5) слева на матрицу X, получаем

$$XY\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-m} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, учитывая (2), имеем $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_{n-m}=0$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть выполняется условие (1) и $A:0$ — свободный $n-m$-членный правый R-модуль с базисной матрицей $U=(u_{ik})_{n,n-m}$, $u_{ik}\in R$.

Рассмотрим матрицу

$$T=E^n-BA. \tag{6}$$

Очевидно, $T\neq 0$. Так как $AT=0$, то

$$T=UV, \quad V=(v_{ik})_{n-m,n}, \quad v_{ik}\in R, \tag{7}$$

где U — базисная матрица свободного $n-m$-членного правого R-модуля $A:0$.

Очевидно, матрица U не является левым делителем нуля.

Умножая соотношение (7) справа на матрицу U и учитывая (6), получаем

$$UVU=E^n-BAU=U,$$

т. е. $U(VU-E^{n-m})=0$. Отсюда вытекает, что

$$UV=E^{n-m}. \tag{8}$$

Покажем, что матрица V является искомым дополнением матрицы A до обратимой, или, что то же самое, матрица $\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix}$ обратима.

Очевидно, что

$$VB=0. \tag{9}$$

Действительно, $TB=E^nB-BAB=0_{n,m}$.

С другой стороны, в силу (7), имеем $TB=UVB=0_{n,m}$. Отсюда, учитывая, что U не является левым делителем нуля, убеждаемся в справедливости соотношения (9). Следовательно,

$$\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix}(BU)=E^n. \tag{10}$$

Далее, $\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix}$ не является левым делителем нуля. В противоположном случае, предполагая существование ненулевого столбца $(r_1 r_2 \ldots r_n)^T$ такого, что

$$\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

и принимая во внимание то, что

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n-m} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u^1{}_{2k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix} s_k, \quad s_k \in R, \tag{11}$$

где $(u_{1k} u_{2k} \ldots u_{nk})^T$ — столбцы матрицы U, получили бы

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix} \sum_{k=1}^{n-m} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{nk} \end{pmatrix} s_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-m} \end{pmatrix},$$

что невозможно, так как в соотношении (10) не все s_k равны нулю.

Легко показать, что $BU\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix} = E^n$. Действительно, учитывая (10), имеем

$$\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix}(BU)\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix} \qquad \text{или} \quad \begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix}\left[(BU)\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix} - E^n\right] = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix}$ не является левым делителем нуля, вытекает, что $(BU)\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix} = E^n$.

Этим обратимость матрицы $\begin{pmatrix} A \\ V \end{pmatrix}$ доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 1′. *Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и $AB = E^m$, $A = (a_{ik})_{m,n}$, $B = (b_{ik})_{n,m}$, a_{ik}, $b_{ik} \in R$, $m < n$. Чтобы матрица B могла быть дополнена до обратимой над R матрицы, необходимо и достаточно, чтобы модуль $0 : B$ * был свободным $(n-m)$-членным левым R-модулем.*

Следствие 1. *Если $AB = E^{(m)}$, то матрица A может быть дополнена до обратимой тогда и только тогда, когда матрица B может быть дополнена до обратимой, причем дополнения этих матриц можно выбрать взаимообратными.*

* $0 : B$ — это совокупность всех $1 \times n$ матриц с элементами из R, аннулируемыми слева (в смысле матричного умножения) матрицу B.

Следствие 2. *Пусть*

$$(ab)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 1, \; a, \; b, \; c, \; d \in R. \tag{12}$$

Чтобы строку $(a\ b)$ *можно было дополнить до обратимой над* R *матрицы, необходимо и достаточно, чтобы модуль* $(a\ b)$: 0 *был свободным цикличным правым* R*-модулем.*

Если в R отсутствуют делители нуля, то $(a\ b) : 0$ — свободный циклический правый R-модуль тогда и только тогда, когда $aR \cap bR = mR$. Действительно, в силу (12) имеем $aR \cap bR \neq 0$. Далее, если m — наименьшее общее правое кратное элементов a и b, то из

$$au = bv, \quad u, \; v \in R \tag{13}$$

вытекает, что

$$mk = au = bv. \tag{14}$$

Полагая $m = ax = by$, видим, что $u = xk$, $v = yk$. Записав (13) в виде $(ab)\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = 0$ и заметив, что $(ab)\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = 0$, убеждаемся, что

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} k = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Этим показано, что правый R-модуль $(ab) : 0$ — цикличный с базисным элементом $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Свободность $(ab) : 0$ вытекает из того, что в R нет делителей нуля. Проводя приведенные выше рассуждения в обратном порядке, докажем вторую часть утверждения.

Учитывая сказанное выше, видим, что из следствия 2 можно получить, в частности, лемму, доказанную П. М. Коном.

Следствие 3. (см. [1], с. 315). *Два элемента из области целостности с единицей можно взять в качестве элементов первой строки некоторой унимодулярной (обратимой) матрицы над* R *тогда и только тогда, когда для* a *и* b *существуют «правое наименьшее кратное» и «левый наибольший общий делитель» равен единице.*

Более подробно, если $aR \cap bR = mR$ и $ab' = ba' = m$, $ad' - bc' = 1$, то существуют $c, d \in R$ такие, что матрица $A = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}$ унимодулярна (обратимая) с обратной $A' = \begin{pmatrix} d & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix}$.

Теоремы 1 и 1′ существенно обобщают соответствующие теоремы работ [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Cohn P. M. Non commutative unique factorisation Domains. — Trans. Amer. Math. Soc., 1963, **109**, N 2, 3, p. 3—331.
2. Казімірський П. С., Луник Ф. П. Доповнення однорядкової матриці над некомутативним кільцем до оборотної. — ДАН УРСР, 1965, № 6, с. 706—710.
3. Казімірський П. С., Луник Ф. П. Доповнення прямокутної оберненої матриці до оборотної. — Вестник Львовск. политехн. ин-та, 1965, № 8, с. 61—66.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР,
Львовский политехнический институт

Поступила в редакцию
30.XI. 1976 г.