УДК 517.537

С. С. Линчук

К вопросу о базисности последовательных остатков и частичных сумм ряда Тейлора аналитической функции

Пусть A_R $(0 < R \leqslant \infty)$ — пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ функций с топологией компактной сходимости, а $f(z) \in A_R$. В этой заметке находятся условия квазистепенной базисности в A_R[1]* некоторых систем функций, связанных с частичными суммами и остатками ряда Тейлора функции $f(z)$.

1. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu_k} z^{\nu_k} \in A_R$, причем $f(z)$ отлична от многочлена и $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty} \cup \{\nu_k\}_{k=0}^{\infty} = \{n\}_{n=0}^{\infty}$ $(\{\mu_k\} \cap \{\nu_k\} = \varnothing)$. Найдем необходимые и достаточные условия квазистепенной базисности системы функций

$$\{z^{\mu_n}\}_{n=0}^{\infty} \cup \{R_{\nu_n}(z)\}_{n=0}^{\infty}, \quad R_{\nu_n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{\nu_k} z^{\nu_k}.$$

Предположим, что данная система образует в некотором пространстве A_r $(0 < r \leqslant R)$ квазистепенной базис. Тогда оператор T, определяемый на элементах степенного базиса соотношениями

$$Tz^{\mu_n} = z^{\mu_n}, \quad Tz^{\nu_n} = R_{\nu_n}(z) \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

является изоморфизмом пространства A_r на себя. Матрица $[t_{i,n}]$ оператора T имеет вид

$$t_{i,\mu_n} = \begin{cases} 1, & i = \mu_n, \\ 0, & i \neq \mu_n, \end{cases} \qquad t_{i,\nu_n} = \begin{cases} a_{\nu_k}, & \text{если одновременно } i = \nu_k \text{ и } i \geqslant \nu_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

* Под квазистепенным базисом пространства A_R понимаем систему, являющуюся образом степенного базиса при отображении с помощью изоморфизма пространства A_R на себя.

Поскольку оператор T является изоморфизмом пространства A_r на себя и матрица T нижнетреугольна, то, как следует из [2]*,

$$a_{\nu_k} \neq 0 \ (k=0,\ 1,\ \ldots) \text{ и } \lim_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} = 1.$$

Поэтому $R=1$ и необходимо, чтобы $r \leqslant 1$. Оказывается, что эти же условия и достаточны, т. е. верна следующая теорема

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu_k} z^{\nu_k} \in A_R$, *причем* $f(z)$ *отлична от многочлена*, $\{\mu_i\} \cup \{\nu_k\} = \{n\}$ $(\{\mu_k\} \cap \{\nu_k\} = \varnothing)$ *и* $R_{\nu_n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{\nu_k} z^{\nu_k}$. *Для того чтобы система функций* $\{z^{\mu_n}\} \cup \{R_{\nu_n}(z)\}$ *образовывала в некотором пространстве* A_r *квазистепенной базис, необходимо и достаточно, чтобы* $r \leqslant 1$, $a_{\nu_k} \neq 0$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$ *и* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} = 1$.

Доказательство. Необходимость условий теоремы доказана выше. Остановимся на доказательстве их достаточности. С этой целью рассмотрим оператор T_2, определяемый на элементах степенного базиса соотношениями

$$T_2 z^{\mu_n} = z^{\mu_n},\ T_2 z^{\nu_n} = z^{\nu_n} - z^{\nu_{n+1}} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots).$$

Как это легко следует из теоремы 1 работы [3], система функций $\{z^{\mu_n}\} \cup \cup \{z^{\nu_n} - z^{\nu_{n+1}}\}$ образует квазистепенной базис в каждом из пространств A_r с $0 < r \leqslant 1$. Следовательно, оператор T_2 является изоморфизмом каждого пространства A_r на себя с $0 < r \leqslant 1$; а значит, изоморфизмом A_r на себя есть и оператор T_2^{-1} $\left(\text{здесь } T_2^{-1} \text{ — обратный к } T_2 \text{ и, очевидно, } T_2^{-1} z^{\mu_n} = z^{\mu_n},\ T_2^{-1} z^{\nu_n} = \sum_{k=n}^{\infty} z^{\nu_k}\right)$.

Введем в рассмотрение оператор T_1:

$$T_1 z^{\mu_n} = z^{\mu_n}, \quad T_1 z^{\nu_n} = a_{\nu_n} z^{\nu_n} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots).$$

В силу условий теоремы он является изоморфизмом A_r на себя $(0 < r \leqslant \leqslant \infty)$. Поэтому и оператор $T_0 = T_1 T_2^{-1}$ является изоморфизмом каждого пространства A_r $(0 < r \leqslant 1)$ на себя. Значит, система функций $\{(T_1 T_2^{-1}) z^n\}$ является квазистепенным базисом в каждом пространстве A_r с $0 < r \leqslant 1$. Легко видеть, однако, что $(T_1 T_2^{-1}) z^{\mu_n} = z^{\mu_n}$ и $(T_1 T_2^{-1}) z^{\nu_n} = R_{\nu_n}(z)$ $(n = = 0,\ 1,\ \ldots)$, чем и завершается доказательство теоремы.

Замечание 1. При $\nu_n = n$ из теоремы 1 получаем условия квазистепенной базисности системы $\left\{\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right\}$, достаточность которых доказана в [4] (см. также [5]). При $\nu_n = pn$ (p— фиксированное натуральное число) получаем условия квазистепенной базисности системы $\{z^{\mu_n}\} \cup \{R_{pn}(z)\}$, исследованной на базисность в [6].

---

* Случай $r = \infty$, очевидно, невозможен.

Замечание 2. Легко проверить, что если $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in A_R$, то условия $r \leqslant 1$, $a_k \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$ и $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}=1$ также необходимы и достаточны для квазистепенной базисности системы $\{a_{\mu_n} z^{\mu_n}\} \cup \left\{\sum_{k=\nu_n}^{\infty} a_k z^k\right\}$ в пространстве A_r. В этом случае при доказательстве достаточности (см. доказательство теоремы 1) в качестве T_1 и T_2 можно взять операторы

$$T_1 z^n = a_n z^n \ (n=0, 1, \ldots),$$

$$T_2 z^{\mu_n} = z^{\mu_n}, \qquad T_2 z^{\nu_n} = z^{\nu_n} - z^{\nu_n+1} - \ldots - z^{\nu_{n+1}} \ (n=0, 1, \ldots).$$

При этом следует учесть, что

$$T_2^{-1} z^{\mu_n} = z^{\mu_n}, \quad T_2^{-1} z^{\nu_n} = \frac{z^{\nu_n}}{1-z} \quad (n=0, 1, \ldots).$$

Как и предыдущее утверждение доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu_k} z^{\nu_k} \in A_R$, *причем* $f(z)$ *отлична от многочлена*, $\{\mu_k\} \cup \{\nu_k\} = \{n\}$ $(\{\mu_k\} \cap \{\nu_k\} = \varnothing)$ *и* $S_{\nu_n}(z)=\sum_{k=0}^{n} a_{\nu_k} z^{\nu_k}$. *Для того, чтобы система функций* $\{z^{\mu_n}\} \cup \{S_{\nu_n}(z)\}$ *образовывала в некотором пространстве* A_r *квазистепенной базис, необходимо и достаточно, чтобы*

а) *в случае* $r<\infty$ $\quad a_{\nu_k} \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|}=1$ *и* $r>1$;

б) *в случае* $r=\infty$ $\quad a_{\nu_k} \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$, $0<\varliminf_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} < \infty$.

Доказательство. Предположим, что данная система образует квазистепенной базис в некотором пространстве A_r, $0<r\leqslant\infty$. Тогда оператор T

$$T z^{\mu_n} = z^{\mu_n}, \qquad T z^{\nu_n} = S_{\nu_n}(z) \quad (n=0, 1, \ldots)$$

является изоморфизмом пространства A_r на себя. Матрица $[t_{i,n}]$ оператора T верхнетреугольная и имеет вид

$$t_{i,\mu_n} = \begin{cases} 1, & i=\mu_n, \\ 0, & i \neq \mu_n, \end{cases} \quad t_{i,\nu_n} = \begin{cases} a_{\nu_k}, & \text{если одновременно } i=\nu_k \text{ и } i \leqslant \nu_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поэтому согласно лемме из [2] условия $a_{\nu_k} \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$ и $\lim_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|}=1$ в случае $r<\infty$, а также условия $a_{\nu_k} \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$ и $0<\varliminf_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[\nu_k]{|a_{\nu_k}|} < \infty$ в случае $r=\infty$ являются необходимыми для квазистепенной базисности в соответствующих пространствах A_r. Покажем, далее, что в случае $r<\infty$ необходимым условием квазистепенной базисности в пространстве A_r является также условие $r>1$. Действительно, поскольку оператор T непрерывно отображает A_r в A_r, то элементы его матрицы $[t_{i,n}]$ удовлетворяют условию

$$\forall \rho<r, \ \exists \rho_1<r, \ C \geqslant 0: |t_{i,n}| \leqslant C \frac{\rho_1^n}{\rho^i} \quad (i, n=0, 1, \ldots).$$

Зафиксируем произвольное $\rho<r$ и найденные по нем $\rho_1<r$ и $C\geqslant 0$.

Тогда для элементов строчки с номером ν_0 будем иметь

$$|t_{\nu_0,n}| \leqslant C\frac{\rho_1^n}{\rho^{\nu_0}} \quad (n=0, 1, \ldots).$$

Учитывая что $t_{\nu_0,\nu_n} = a_{\nu_0}$ $(n \geqslant 0)$, получаем $|a_{\nu_0}| \leqslant C\dfrac{\rho_1^{\nu_n}}{\rho^{\nu_0}}$ $(n=0, 1, \ldots)$. Из выписанных неравенств следует необходимость условия $r > 1$. Действительно, если бы $r \leqslant 1$, то и $\rho_1 < 1$, и, поскольку $f(z)$ отлична от многочлена, мы получили бы $a_{\nu_0} = 0$, что невозможно согласно ранее полученному условию $a_{\nu_k} \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$. Необходимость условий теоремы доказана.

При доказательстве их достаточности в качестве вспомогательного квазистепенного базиса следует рассмотреть систему $\{z^{\mu_n}\} \cup \{z^{\nu_0}\} \cup \{z^{\nu_n} - z^{\nu_{n-1}}\}$, рассуждая аналогично проверке достаточности условий теоремы 1.

Следствие. *Для того чтобы система последовательных частичных сумм ряда Тейлора функции $f(z) \in A_R$, т. е. система $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right\}$, образовывала в некотором пространстве A_r квазистепенной базис, необходимо и достаточно, чтобы*

а) *в случае $r < \infty$ $a_k \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ и $r > 1$;*

б) *в случае $r = \infty$ $a_k \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$, $0 < \varliminf\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leqslant \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \infty$.*

2. Приведем некоторые обобщения предыдущих утверждений.

Теорема 3. *Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in A_R$, $\{\mu_k\} \cup \{\nu_k\} = \{n\}$ $(\{\mu_k\} \cap \{\nu_k\} = \varnothing)$, $R_{\mu_n}^{(1)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{\mu_k} z^{\mu_k}$, $R_{\nu_n}^{(2)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_{\nu_k} z^{\nu_k}$. Для того чтобы система функций $\{R_{\mu_n}^{(1)}(z)\} \cup \{R_{\nu_n}^{(2)}(z)\}$ образовывала в некотором пространстве A_r квазистепенной базис, необходимо и достаточно, чтобы $r \leqslant 1$, $a_k \neq 0$ $(k=0, 1, \ldots)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы 3 проверяется аналогично необходимости условий теоремы 1.

Докажем их достаточность. С этой целью рассмотрим операторы T_1 и T_2:

$$T_1 z^{\mu_n} = z^{\mu_n}, \quad T_1 z^{\nu_n} = R_{\nu_n}^{(2)}(z) \quad (n=0, 1, \ldots),$$

$$T_2 z^{\nu_n} = z^{\nu_n}, \quad T_2 z^{\mu_n} = R_{\mu_n}^{(1)}(z) \quad (n=0, 1, ..,).$$

В силу условий теоремы 3 (как следует из теоремы 1) системы функций $\{z^{\mu_n}\} \cup \{R_{\nu_n}^{(2)}(z)\}$ и $\{z^{\nu_n}\} \cup \{R_{\mu_n}^{(1)}(z)\}$ образуют квазистепенные базисы в пространствах A_r с $0 < r \leqslant 1$. Поэтому операторы T_1 и T_2, а вместе с ними и операторы T_1^{-1} и T_2^{-1}, являются изоморфизмами каждого пространства A_r $(0 < r \leqslant 1)$ на себя. Рассмотрим оператор T, определенный на элементах степенного базиса соотношениями $Tz^{\mu_n} = R_{\mu_n}^{(1)}(z)$, $Tz^{\nu_n} = R_{\nu_n}^{(2)}(z)$ $(n=0, 1, \ldots)$. Оператор T непрерывно отображает A_r в A_r $(0 < r \leqslant 1)$. Более того, оператор T также непрерывно обратим, и обратным к нему, как нетрудно проверить, является оператор $T_1^{-1}P_1 + T_2^{-1}P_2$, где P_1 и P_2 — соответственно операторы проектирования на подпространства, порожденные элементами множеств $\{z^{\nu_n}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{z^{\mu_n}\}_{n=0}^{\infty}$. Поэтому система функций $\{R_{\mu_n}^{(1)}(z)\} \cup$

$\bigcup \{R^{(2)}_{\nu_n}(z)\}$ действительно является квазистепенным базисом каждого пространства A_r с $0 < r \leqslant 1$.

Теорема 4. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in A_R$, $\{\mu_k\} \cup \{\nu_k\} = \{n\}$ $(\{\mu_k\} \cap \cap \{\nu_k\} = \varnothing)$, $S^{(1)}_{\mu_n}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{\mu_k} z^{\mu_k}$, $S^{(2)}_{\nu_n}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{\nu_k} z^{\nu_k}$. *Для того чтобы система функций* $\{S^{(1)}_{\mu_n}(z)\} \cup \{S^{(2)}_{\nu_n}(z)\}$ *образовала в некотором пространстве* A_r *квазистепенной базис, необходимо и достаточно, чтобы*

а) *в случае* $r < \infty$ $a_k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ *и* $r > 1$;

б) *в случае* $r = \infty$ $a_k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $0 < \underline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leqslant \overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \infty$.

Замечание 3. Утверждения, аналогичные приведенным выше, легко могут быть получены и для случая систем с большим числом ее «составляющих», построенных с помощью остатков или частичных сумм рядов Тейлора некоторых функций.

3. В заключение рассмотрим систему функций

$$\{S_{\mu_n}(z)\} \cup \{R_{\nu_n}(z)\} \quad (\{\mu_n\} \cup \{\nu_n\} = \{n\},\ \{\mu_n\} \cap \{\nu_n\} = \varnothing),$$

где, как и ранее, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in A_R$, $S_{\mu_n}(z) = \sum_{k=0}^{\mu_n} a_k z^k$, а $R_{\nu_n}(z) = \sum_{k=\nu_n}^{\infty} a_k z^k$.

Естественно исследовать приведенную систему на квазистепенную базисность. Но если только существует такое ν_{n_0}, что $\nu_{n_0} + 1 \notin \{\nu_n\}$ (например, если множества $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ бесконечны) то, как это легко проверить с помощью критерия полноты С. Банаха, не существует функции $f(z)$ и пространства A_r, в котором система $\{S_{\mu_n}(z)\} \cup \{R_{\nu_n}(z)\}$ была бы полной. Действительно, условие $a_k \neq 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, очевидно, является необходимым для полноты данной системы. Полагая его выполненным, рассмотрим линейный непрерывный в произвольном пространстве A_r функционал Γ, построенный с помощью следующей последовательности $\{\gamma_n\}$ [8]:

$$\gamma_i = \begin{cases} a_{\nu_{n_0}+1}, & i = \nu_{n_0}, \\ -a_{\nu_{n_0}}, & i = \nu_{n_0} + 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\Gamma(S_{\mu_n}(z)) = \Gamma(R_{\nu_n}(z)) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, и поскольку $\Gamma \neq 0$, то система функций $\{S_{\mu_n}(z)\} \cup \{R_{\nu_n}(z)\}$ не полна, а поэтому и не является квазистепенным базисом ни в одном из пространств A_r.

Выражаю искреннюю благодарность Н. И. Нагнибиде за помощь, оказанную при написании этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хапланов М. Г. Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций. — ДАН СССР, 1951, **80**, № 2, с. 177—180.
2. Горгула В. И., Нагнибида Н. И. Условия базисности одной системы аналитических функций. — УМЖ, 1972, **24**, № 6, с. 820—823.
3. Ибрагимов И. И., Линчук С. С., Нагнибида Н. И. О базисах в аналитическом пространстве, близких к степенным.—ДАН СССР, 1974, **214**, № 3, 501—504.
4. Альпер С. Я. О полноте систем аналитических функций. — ДАН СССР, 1949, **66**, № 6, с. 1029—1032.

5. **Ибрагимов И. И., Нагнибида Н. И.** О базисности некоторых систем аналитических функций. — ДАН СССР, 1972, **206**, № 5, с. 1043—1045.
6. **Ибрагимов И. И., Нагнибида Н. И.** О полноте и базисности некоторых систем аналитических функций. — ДАН СССР, 1972, **206**, № 6, с. 1290—1292.
7. **Хапланов М. Г.** Линейные преобразования аналитических пространств. — ДАН СССР, 1951, **80**, № 1, с. 21—24.
8. **Маркушевич А. И.** О базисе в пространстве аналитических функций. — Мат. сб., 1945, **17**, № 2, с. 211—252.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
10.V. 1976 г.