УДК 519.46

В. В. Остапенко

Линейные топологические N-группы

Группы с нормализаторным условием для подгрупп (N-группы), изучались многими авторами. В. И. Плоткин доказал локальную нильпотентность N-групп. Обращение этой теоремы, как показывает пример, построенный М. И. Каргаполовым, неверно (см. [1, 2]). Однако в классе линейных групп любая локально нильпотентная группа является N-группой. Топологические N-группы изучались в работах [3, 4]. Наиболее полно рассмотрены топологические N-группы Ли и локально компактные N-группы.

Под линейной топологической группой понимаем подгруппу, необязательно замкнутую, группы $GL(n, K)$, где n — натуральное число, K — топологическое поле.

В этой работе на примерах показывается, что класс линейных топологических N-групп шире класса линейных N-групп (в абстрактном смысле). Далее приводятся необходимые и достаточные условия локальной нильпотентности топологических N-групп, доказывается разрешимость линейных топологических N-групп и показана возможность применения полученных результатов для изучения локально компактных топологических N-групп.

Напомним следующие определения.

Определение 1. *Группа G называется N-группой (в абстрактном смысле), если любая собственная подгруппа H группы G отлична от своего нормализатора, т. е. $H \neq N_C(H)$, где $N_G(H) = (x \in G : x^{-1}Hx = H)$.*

Определение 2. *Группа G называется топологической N-группой, если любая собственная замкнутая подгруппа группы G отлична от своего нормализатора.*

Класс топологических N-групп шире класса N-групп в абстрактном смысле [3, 4]. Возникает вопрос, как ведут себя линейные группы. Построенные ниже примеры дают тот же ответ, что и в общем случае, т. е. в них строятся линейные топологические N-группы, не являющиеся N-группами в абстрактном смысле.

Пример 1. Рассмотрим следующую группу H над полем комплексных чисел C:

$$H = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 \\ 0 & \varepsilon_m^{-1} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_m^{2^m} = 1, \quad m = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Нетрудно видеть, что H локально нильпотентна, а значит H — ZA-группа (см. [5]). Но из [3] следует, что ее замыкание $\overline{H}$ в группе $GL(2, C)$ является топологической N-группой. С другой стороны, $\overline{H}$ не является локально нильпотентной группой, а значит, и N-группой в абстрактном смысле.

Пример 2. Группу, изоморфную $\overline{H}$, можно построить и над полем вещественных чисел. Такой группой является группа

$$\left\{ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \right\}.$$

Пример 3. В [4] построен пример вполне несвязной топологической N-группы, не являющейся N-группой в абстрактном смысле. Однако приведенная группа не представима линейной группой. Поэтому возникает вопрос о существовании вполне несвязной линейной топологической N-группы, не являющейся абстрактной N-группой. Так же, как и в примере 1, доказывается, что группа

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 \\ 0 & \varepsilon_m^{-1} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_m^{m} = 1, \quad m = 1, 2, \ldots \right\}$$

искомая.

Теорема 1. *Топологическая N-группа G тогда и только тогда локально нильпотентна, когда для любой локально нильпотентной подгруппы $H \leqslant G$ ее замыкание в G локально нильпотентно.*

Доказательство. Из леммы Цорна следует, что всякий элемент из G лежит в некоторой максимальной локально нильпотентной подгруппе H. В силу условия теоремы, H можно считать замкнутой подгруппой. Если доказать, что H нормальна в G, то G покроется локально нильпотентными нормальными подгруппами и согласно теореме Плоткина (см. [1]) будет локально нильпотентной. Пусть $g^{-1}N_G(H)\,g = N_G(H)$, $g \in G$. Тогда H^g и H нормальны в $N_G(H)$. Согласно теореме Плоткина $H^g H$ локально нильпотентна, но ввиду максимальности H $H^g H = H$. Отсюда $H^g = H$, т. е. $g \in N_G(H)$. Таким образом, $N_G(H)$ совпадает со своим нормализатором. Но в силу замкнутости H, замкнут и $N_G(H)$. Отсюда в силу нормализаторного условия $N_G(H) = G$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Топологическая N-группа, являющаяся подгруппой $T(n, K)$, нильпотентна ($T(n, K)$ — линейная треугольная группа над топологическим полем K).*

Доказательство. Любая локально нильпотентная линейная треугольная группа нильпотентна, а значит, ее замыкание в любой группе также нильпотентно. Осталось применить теорему 1.

Теорема 2. *Линейная топологическая N-группа G разрешима.*

Доказательство. Согласно лемме Цорна, каждый элемент группы G лежит в максимальной локально разрешимой подгруппе H. Согласно теореме Цассенхауза (см., например, [5]) H разрешима. Так как ее замыкание в G также разрешимо, то H — замкнутая подгруппа.

Аналогично доказательству теоремы 1, можем показать, что H — нормальный делитель группы G. Следовательно, H покрывается разрешимыми нормальными делителями, но тогда, вследствие разрешимости произведения двух разрешимых нормальных делителей, G локально разрешима. Применяя теорему Цессенхауза, получаем разрешимость G. Теорема доказана.

Следствие 2. *Линейная топологическая N-группа G над алгебраически замкнутым топологическим полем является расширением нильпотентной группы при помощи конечной нильпотентной группы.*

Доказательство. Согласно теореме Мальцева — Колчина [5] группа G, будучи разрешима, обладает триангулируемым нормальным делителем K конечного индекса. Так как замыкание K в G обладает перечисленными выше свойствами, его можно считать замкнутым нормальным делителем. Но тогда K — топологическая N-группа (см. [3]), и согласно следствию 1 K нильпотентна. G/K — конечная группа. С другой стороны, G/K — N-группа. Но конечная N-группа нильпотентна, что и доказывает следствие.

Следствие 3. *Связная линейная группа G над алгебраически замкнутым топологическим полем, обладающая всюду плотной топологической N-подгруппой G_1, нильпотентна.*

Доказательство. Из разрешимости G_1 следует разрешимость G. Согласно теореме Мальцева — Колчина G обладает триангулируемым нормальным делителем K конечного индекса. K можно считать замкнутым, но тогда K — будет открытой подгруппой и, в силу связности G, $K = G$. Отсюда вытекает триангулируемость G_1. Применяя следствие 1, получаем нильпотентность G_1, а значит, и G. Следствие доказано.

В [4] показано, что связная локально компактная топологическая N-группа нильпотентна. На основании полученных результатов здесь приводится иное доказательство и утверждение теоремы из [4] несколько усиливается.

Лемма 1. *Пусть φ — непрерывный гомоморфизм топологической группы G на топологическую группу G^*. Если G — топологическая N-группа, то такой является и группа G^*.*

Доказательство. Пусть H^* — замкнутая подгруппа G^*. Тогда $H=\varphi^{-1}(H^*)$ — замкнутая подгруппа в G. По условию $H\neq N_G(H)$. Рассмотрим группы G и G^* как абстрактные, и пусть K—ядро алгебраического гомоморфизма φ. Ясно, что $K\leqslant H$. Покажем, что $H^*\neq N_{G^*}(H^*)$. Пусть $g\in N_G(H)$ и $g\bar{\in} H$. Тогда $g^*=\varphi(g)\in N_{G^*}(H^*)$, так как для любого $h\in H$ $\varphi(g^{-1}hg)\in\varphi(H)$ или $\varphi(g)^{-1}\varphi(h)\varphi(g)\in\varphi(H)$. Предположим $g^*\in H^*$. Это означает, что $gK\subset HK$, но $K\leqslant H$, отсюда $g\in H$. Из полученного противоречия следует доказательство леммы.

Следствие 4. *Пусть G — топологическая группа, содержащая всюду плотную топологическую N-подгруппу G_1, и φ — гомоморфизм G на G^*. Тогда G^* будет содержать всюду плотную топологическую N-подгруппу.*

Доказательство. Пусть $\varphi(G_1)=G_1^*$; G_1^* всюду плотная в G^*. Если φ_1 — сужение гомоморфизма φ на G, то φ_1 — непрерывный гомоморфизм. Согласно лемме 1 $G_1^*=\varphi_1(G_1)$ — топологическая N-группа, что и доказывает следствие.

Теорема 3. *Пусть G — связная локально компактная группа, содержащая всюду плотную топологическую N-подгруппу G_1. Тогда G нильпотентна.*

Доказательство. В любой окрестности единицы группы G существует нормальный делитель K такой, для которого G/K — связная группа Ли. Согласно следствию 4, G/K содержит всюду плотную топологическую N-группу. С другой стороны, связная проективно нильпотентная группа нильпотентна [6]. Следовательно, достаточно доказывать теорему для связных групп Ли.

Пусть ρ — присоединенное представление группы G в группу $GL(n, C)$, где n — подходящее натуральное число. В силу следствия 4 $\rho(G)$ содержит всюду плотную топологическую N-подгруппу. Но тогда, ввиду следствия 3, $\rho(G)$ нильпотентна. Известно, что существует связная группа Ли G_0, локально изоморфная группе G, и такая что $G_0/Z(G_0)=\rho(G)$, где $Z(G_0)$ — центр группы G_0. Отсюда следует нильпотентность G_0, а значит, и G. Теорема доказана.

В заключение рассмотрим линейные топологические N-группы над полем рациональных чисел P.

Следующая лемма является частным случаем более общего результата, полученного в [7]. (Здесь, для полноты изложения, приводим лемму вместе с доказательством.)

Лемма 2. *Локально нильпотентная группа G над полем P нильпотентна.*

Доказательство. Согласно теореме Цассенхауза (см. [5]) достаточно доказать лемму для абсолютно неприводимой группы. Поэтому будем считать G неприводимой над полем комплексных чисел C.

Рассмотрим группу $\widehat{G}=\{G, C^*E_n\}$ (n — степень G). Известно (см. [5]), что существует локально конечная группа G_0 такая, что $G_0=\widehat{G}\cap SL(n, C)$, $\widehat{G}=G_0C^*$. Рассмотрим группу $G_1=\{g_0\in G_0 : g_0z\in G,\ z\in C^*E_n\}$. G_1 локально нильпотентна. Показав конечность G_1, докажем нильпотентность G_1, а значит, и нильпотентность $G_1C^*E_n$. Заметив, что $G\leqslant G_1C^*E_n$, получим утверждение леммы.

Любой элемент $g\in G$ представим в виде $g=g_1z$, $g_1\in G_1$, $z\in C^*E_n$.

$$\det g=\det g_1 \det z=\det z,$$

так как $g_1\in SL(n, C)$. Но $\det g\in P$, следовательно, $\det z\in P$ и, значит, $z^n\in GL(n, P)$. Отсюда следует, что и $g_1^n\in GL(n, P)$.

Обозначим $G_1^{(n)} = (g_1^n;\ g_1 \in G_1)$ и рассмотрим множество всех характеристических полиномов для элементов из $G_1^{(n)}$.

В [7] показано, что периодическая группа корней полиномов над полем рациональных чисел конечна, если степени полиномов ограничены в совокупности. Отсюда следует, что существует такое, m, при котором для любого $g_1^n \in G_1^{(n)}$ $g_1^{nm} = 1$, т. е. порядки элементов из G_1 ограничены в совокупности и, согласно критерию Бернсайда [5], G_1 — конечная группа. Отсюда и следует утверждение леммы.

Из теоремы 1 и леммы 2 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Линейная топологическая N-группа над полем P нильпотентна.*

З а м е ч а н и е. Теорема 4 справедлива и для линейных групп над произвольным конечным расширением поля рациональных чисел.

Выражаю благодарность В. С. Чарину за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. К а р г а п о л о в М. И., М е р з л я к о в Ю. И. Основы теории групп. М., «Наука», 1972. 239 с.
2. К у р о ш А. Г. Теория групп. М., «Наука», 1967. 648 с.
3. П л а т о н о в В. П. Строение топологических локально проективно нильпотентных групп и групп с нормализаторным условием. — Мат. сб., 1967, **72**, № 1, с. 38—58.
4. У ш а к о в В. И. Топологические группы с нормализаторным условием для замкнутых подгрупп. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, **27**, № 4, с. 945—949.
5. С у п р у н е н к о Д. А. Группы матриц. М., «Наука», 1972. 349 с.
6. П л а т о н о в В. П. Локально проективно нильпотентные подгруппы и нильэлементы в топологических группах. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1966, **30**, № 6, с. 1257—1274.
7. Ч а р и н В. С. О группах автоморфизмов нильпотентных групп. — УМЖ, 1954, **6**, № 3, 295—304.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию 23.VI. 1976 г.,
после переработки — 23.VI. 1977 г.