УДК 519.9

А. П. Великий

Асимптотический подход к переносу граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

В работе [1] рассмотрен асимптотический подход к переносу граничных условий для линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

В этой статье результаты [1] переносятся на случай системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Перенос граничных условий. Пусть на отрезке $[0, T]$ задана краевая задача для вектора $x = (x_1, \ldots, x_p)$:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f, \tag{1}$$

$$x_j(0) = x_0^j \quad (j = 1, k), \tag{2}$$

$$x_m(T) = x_T^m \quad (m = \overline{1, l}), \quad k + l = p; \quad l \geqslant 2. \tag{3}$$

Здесь $A = \{a_{ij};\ 1 \leqslant i, j \leqslant p\}$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$.

Как известно [2], решение уравнения (1) с некоторым начальным вектором $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^p)$ можно записать в виде

$$x(t) = Q(t)\, x_0 + \int\limits_0^t Q(t, \tau) f(\tau)\, d\tau, \tag{4}$$

где $Q(t, \tau) = Q(t)\, Q^{-1}(\tau)$, а $Q(t)$ — решение уравнения $\frac{dQ}{dt} = AQ$ с начальным условием $Q(0) = I$ (I — единичная матрица).

Пусть $q_{ij}(t, \tau)$ — элементы матрицы $Q(t, \tau)$, т. е. $Q(t, \tau) = \{q_{ij}(t, \tau);$ $1 \leqslant i, j \leqslant p\}$.

Лемма 1. *Краевая задача* (1) — (3) *эквивалентна следующей начальной задаче:*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f, \tag{1'}$$

$$x_j(0) = x_0^j \quad (j = \overline{1, k}), \tag{2'}$$

$$x_{k+m}(0) = x_0^{k+m} \quad (m = \overline{1, l};\ k + l = p); \tag{5}$$

при этом равенства (1′) *и* (2′) *совпадают соответственно с* (1) *и* (2), *а дополнительные начальные значения* x_0^{k+m} $(m = \overline{1, l})$ *определяются системой линейных алгебраических уравнений*

$$\overline{Q}_T X_0^{\partial} = Y(T) \qquad X_0^{\partial} = (x_0^{k+1}, \ldots, x_0^{p}), \qquad Y(T) = (y_T^1, \ldots, y_T^l), \tag{6}$$

$$y_T^r = x_T^r - \sum_{j=1}^{k} q_{rj}(T)\, x_0^j - \sum_{j=1}^{\rho} \int\limits_0^T q_{rj}(T, \tau) f_j(\tau)\, d\tau, \tag{7}$$

$$\overline{Q}_T = \{q_{r,k+m}(T);\ 1 \leqslant r, m \leqslant l\}$$

(r — *номер строки*, m — *номер столбца*).

Доказательство. Записав (4) в развернутом виде и рассматривая первые l строк получаемой системы равенств, при $t = T$ имеем

$$x_T^r = \sum_{j=1}^{p} q_{rj}(T)\, x_0^j + \sum_{j=1}^{p} \int_0^T q_{rj}(T, \tau)\, f_j(\tau)\, d\tau.$$

Отсюда, оставляя слева только члены, содержащие величины x_0^{k+m} $(m = \overline{1, l})$, и учитывая обозначения (7), получаем систему (6). Лемма доказана.

Замечание 1. Легко видеть, что аналогичная лемма о переносе граничных условий в начальную точку $t = 0$ имеет место и в том случае, когда краевые условия исходной задачи (1) — (3) заданы в нескольких различных точках $t = T_i$.

2. Асимптотическое представление матрицы $\overline{Q}_T$. В дальнейшем будем считать,что матрица A постоянна. Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ — собственные числа матрицы A, которые, для простоты, считаем различными. Пусть, далее, матрица B такая, для которой $B^{-1}AB = \operatorname{diag}[\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}]$. Такая матрица B существует [2], и при этом матрица $Q(t)$, входящая в (4), приводится к виду

$$Q(t) = e^{At} = B \operatorname{diag}[e^{\lambda_0 t}, e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_{p-1} t}]\, B^{-1}. \tag{8}$$

Пусть b_{ij} и $b_{ij}^{(-1)}$ — элементы соответственно матриц B и B^{-1}, т. е.

$$B = \{b_{ij};\ 1 \leqslant i, j \leqslant p\},\ B^{-1} = \{b_{ij}^{(-1)};\ 1 \leqslant i, j \leqslant p\}. \tag{9}$$

Введем матрицы

$$B_l = \{b_{ij};\ 1 \leqslant i, j \leqslant l\}, \quad B_l^{(-1)} = \{b_{i,k+j}^{(-1)};\ 1 \leqslant i, j \leqslant l\}; \tag{10}$$

и пусть $b_{\cdot,\nu+1}$ — $(\nu+1)$-й столбец матрицы B_l, а $b_{\nu+1,\cdot}^{(-1)}$ — $(\nu+1)$-я строка матрицы $B_l^{(-1)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, l-1)$.

Лемма 2. *Если выполнены условия:*

1) *собственные значения матрицы A удовлетворяют соотношению*

$$\operatorname{Re}\lambda_0 > \ldots > \operatorname{Re}\lambda_l \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_{p-1}, \tag{11}$$

$$2) \quad \det B_l \neq 0, \quad \det B_l^{(-1)} \neq 0, \tag{12}$$

то при достаточно большом T матрица $\overline{Q}_T$ асимптотически представима в виде

$$\overline{Q}_T = e^{\lambda_0 T}\left(Q_0 + \sum_{\nu=1}^{l-1} \varepsilon_\nu Q_\nu + o(\varepsilon_{l-1})\right), \tag{13}$$

где

$$\varepsilon_\nu = e^{-(\lambda_0 - \lambda_\nu)T} \quad (\nu = \overline{0, l-1}), \tag{14}$$

$$Q_\nu = [b_{\cdot,\nu+1} \otimes b_{\nu+1,\cdot}^{(-1)}] \quad (\nu = \overline{0, l-1}) \tag{15}$$

($\otimes$ — знак тензорного умножения), и при этом матрицы Q_ν такие, для которых

$$\det Q_0 = \det(Q_0 + \varepsilon_1 Q_1) = \ldots = \det\left(Q_0 + \sum_{\nu=1}^{l-2} \varepsilon_\nu Q_\nu\right) = 0, \tag{16}$$

$$\det\left(Q_0 + \sum_{\nu=1}^{l-1} \varepsilon_\nu Q_\nu\right) \neq 0. \tag{17}$$

Доказательство. Для элементов q_{ij} матрицы $Q(t)$ из (8) с учетом (9) при $t=T$ получаем

$$q_{ij}(T)=\sum_{\nu=0}^{p-1} b_{i,\nu+1} b_{\nu+1,j}^{(-1)} e^{\lambda_\nu T}.$$

Поэтому для матрицы $\overline{Q}_T$, учитывая (11) и (14), имеем

$$\overline{Q}_T=[q_{r,k+m}(T)]=\left[\sum_{\nu=0}^{p-1} b_{r,\nu+1} b_{\nu+1,k+m}^{(-1)} e^{\lambda_\nu T}\right]=$$

$$=e^{\lambda_0 T}\left[b_{r1} b_{1,k+m}^{(-1)}+\sum_{\nu=1}^{l-1} \varepsilon_\nu b_{r,\nu+1} b_{\nu+1,k+m}^{(-1)}+\sum_{\nu=l}^{p-1} \varepsilon_\nu b_{r,\nu+1} b_{\nu+1,k+m}^{(-1)}\right]=$$

$$=e^{\lambda_0 T}\left([b_{r1} b_{1,k+m}^{(-1)}]+\sum_{\nu=1}^{l-1} \varepsilon_\nu [b_{r,\nu+1} b_{\nu+1,k+m}^{(-1)}]+o(\varepsilon_{l-1})\right).$$

Отсюда, используя операцию тензорного умножения $\otimes$ и учитывая (15), для $\overline{Q}_T$ получаем разложение (13).

Докажем (16) и (17).

Прямой проверкой убеждаемся, что при любом $n=\overline{0,\ l-1}$

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu Q_\nu = B_{n+1} \operatorname{diag}[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n] B_{n+1}^{(-1)}, \tag{18}$$

где $\varepsilon_0=1$, $B_{n+1}=\{b_{ij};\ i=\overline{1,l};\ j=\overline{1,n+1}\}$, $B_{n+1}^{(-1)}=\{b_{i,k+j}^{(-1)};\ i=\overline{1,n+1};\ j=\overline{1,l}\}$.

Заметим, что правую часть равенства (18) можно представить в эквивалентном виде

$$B_{n+1} \operatorname{diag}[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n] B_{n+1}^{(-1)}=\widehat{B}_{n+1} \operatorname{diag}[\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, 0, \ldots, 0]\, \widehat{B}_{n+1}^{(-1)}, \tag{19}$$

где квадратные матрицы $\widehat{B}_{n+1}$ и $\widehat{B}_{n+1}^{(-1)}$ получаются из прямоугольных матриц B_{n+1} и $B_{n+1}^{(-1)}$ добавлением к матрице B_{n+1} $l-n-1$ нулевых столбцов справа и к матрице $B_{n+1}^{(-1)}$ $l-n-1$ нулевых строк снизу.

В соответствии с таким определением, матрицы $\widehat{B}_{n+1}$ и $\widehat{B}_{n+1}^{(-1)}$ при $n=l-1$ соответственно совпадают с квадратными матрицами B_l и $B_l^{(-1)}$. Отсюда, учитывая (12), а также то, что при $n=l-1$ диагональная матрица, входящая в (19), не содержит нулей на главной диагонали, получаем (17).

При $n<l-1$ определители всех матриц, входящих в (19), в соответствии с определением этих матриц, равны нулю, откуда следует (16). Лемма доказана.

Учитывая (16) и (17), из (13) получаем следующее следствие.

Следствие 1. *$\overline{Q}_T$ — возмущенная матрица на спектре.*

3. Обращение матрицы $\overline{Q}_T$.

Теорема 1. *Если выполнены условия:*

1) *собственные значения матрицы A удовлетворяют соотношению*

$$\operatorname{Re}\lambda_0 > \ldots > \operatorname{Re}\lambda_l \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_{p-1}; \tag{20}$$

2) *матрицы* B_l *и* $B_l^{(-1)}$, *определенные равенствами* (10), *обратимы, то для матрицы* $\overline{Q}_T^{(-1)}$ *имеет место при* $T\to\infty$ *асимптотическое разложение*

$$\overline{Q}_T^{-1}=e^{-\lambda_0 T}\left(\sum_{\nu=0}^{l-1}\varepsilon_\nu^{-1}[\tilde{\beta}_{\cdot,\nu+1}\otimes\beta_{\nu+1,\cdot}^{(-1)}]+o(1)\right), \tag{21}$$

где $\tilde{\beta}_{\cdot,\nu+1}$ — $\nu+1$*-й столбец матрицы*

$$\tilde{B}_l=(B_l^{(-1)})^{-1}=\{\tilde{\beta}_{ij};\ 1\leqslant i,\ j\leqslant l\}, \tag{22}$$

$\beta_{\nu+1,\cdot}^{(-1)}$ — $\nu+1$*-я строка матрицы*

$$B_l^{-1}=\{\beta_{ij}^{(-1)};\ 1\leqslant i,\ j\leqslant l\}. \tag{23}$$

Доказательство. Из (13) (в силу (20)) имеем

$$\overline{Q}_T^{-1}=e^{-\lambda_0 T}(Q_l^{-1}+o(1)), \tag{24}$$

где матрица $Q_l^{-1}=\left(Q_0+\sum_{\nu=1}^{l-1}\varepsilon_\nu Q_\nu\right)^{-1}$ в силу (17) существует.

Далее, используя представление (18), при $n=l-1$ имеем

$$Q_l^{-1}=(B_l\operatorname{diag}[\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_{l-1}]B_l^{(-1)})^{-1}=(B_l^{(-1)})^{-1}\operatorname{diag}[\varepsilon_0^{-1},\ldots,\varepsilon_{l-1}^{-1}]B_l^{-1}.$$

Отсюда, учитывая обозначения (22), (23) и используя операцию тензорного умножения, получаем

$$Q_l^{-1}=\sum_{\nu=0}^{l-1}\varepsilon_\nu^{-1}[\tilde{\beta}_{\cdot,\nu+1}\otimes\beta_{\nu+1,\cdot}^{(-1)}]. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24), получаем (21), и теорема доказана.

Если в разложении (21) ограничиться главным членом разложения, то получаем следующее следствие.

Следствие 2.

$$\overline{Q}_T^{-1}=e^{-\lambda_{l-1}T}([\tilde{\beta}_{\cdot l}\otimes\beta_{l\cdot}^{(-1)}]+O(\varepsilon_T')), \tag{26}$$

где $\varepsilon_T'=\varepsilon_{l-1}\varepsilon_{l-2}^{-1}\to 0$ *при* $T\to\infty$.

4. Асимптотическое представление вектора дополнительных начальных значений.

Теорема 2. *Если выполнены условия*:

1) *собственные значения матрицы* A *удовлетворяют соотношениям*

$$\operatorname{Re}\lambda_0>\ldots>\operatorname{Re}\lambda_l\geqslant\ldots\geqslant\operatorname{Re}\lambda_{p-1}; \tag{27}$$

$$2)\quad \det B_l\neq 0,\quad \det B_l^{(-1)}\neq 0; \tag{28}$$

$$3)\quad \left|\int_0^T e^{\lambda_0\tau}f_j(\tau)\,d\tau\right|\leqslant c<\infty\quad (j=\overline{1,\,l}), \tag{29}$$

где c *не зависит от* T;

4) *граничные значения* x_T^r $(r=\overline{1,\,l})$ *не зависят от* T, *то для вектора* X_0^∂ *имеют место при* $T\to\infty$ *следующие асимптотические формулы:*

$$X_0^\partial=e^{-\lambda_{l-1}T}[(\beta_{l\cdot}^{(-1)},\,Y_0)\,\tilde{\beta}_{\cdot l}+O(\varepsilon_T)]\quad\text{при }\operatorname{Re}\lambda_0<0, \tag{30}$$

$$X_0^\partial=e^{-\lambda_{l-1}T}[(\beta_{l\cdot}^{(-1)},\,(Y_0+Y_1))\,\tilde{\beta}_{\cdot l}+O(\varepsilon_T)]\quad\textit{при }\operatorname{Re}\lambda_0=0, \tag{31}$$

$$X_0^\partial = e^{(\lambda_0-\lambda_{l-1})T}\left[(\beta_{l\cdot}^{(-1)}, Y_1)\,\tilde{\beta}_{\cdot l} + O(\varepsilon_T)\right] \text{ при } \operatorname{Re}\lambda_0 > 0, \tag{32}$$

где $\varepsilon_T \to 0$ *при* $T \to \infty$,

$$Y_0 = (x_T^1, \ldots, x_T^l), \quad Y_1 = (y^1, \ldots, y^l), \tag{33}$$

$$y^r = -\sum_{j=1}^{k} b_{r1} b_{1j}^{(-1)} x_0^j - \sum_{j=1}^{p} b_{r1} b_{1j}^{(-1)} \int_0^T e^{-\lambda_0\tau} f_j(\tau)\,d\tau \quad (r = \overline{1, l}). \tag{34}$$

Доказательство. Рассмотрим систему (6), определяющую вектор X_0^∂. Так как в рассматриваемом случае матрица A системы (1) постоянна, то из (7), учитывая (8), а также (27), (29), в результате несложных выкладок получаем

$$Y(T) = Y_0 + e^{\lambda_0 T}(Y_1 + O(\varepsilon_T)), \tag{35}$$

где Y_0 и Y_1 определены равенствами (33) и (34).

Далее, в силу условий (28) и (27), можно воспользоваться теоремой 1, и, в частности, взять для $\overline{Q}_T^{-1}$ представление (26). Поэтому, учитывая (35), из (6) имеем

$$X_0^\partial = \overline{Q}_T^{-1} Y(T) = e^{-\lambda_{l-1}T}\left([\tilde{\beta}_{\cdot l} \otimes \beta_{l\cdot}^{(-1)}] + o(1)\right)\left(Y_0 + e^{\lambda_0 T}(Y_1 + o(1))\right).$$

Отсюда, рассматривая отдельно случаи $\operatorname{Re}\lambda_0 < 0$, $\operatorname{Re}\lambda_0 = 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$, получаем

$$X_0^\partial = e^{-\lambda_{l-1}T}\left([\tilde{\beta}_{\cdot l} \otimes \beta_{l\cdot}^{(-1)}]\, Y_0 + o(1)\right), \quad \text{если } \operatorname{Re}\lambda_0 < 0, \tag{36}$$

$$X_0^\partial = e^{-\lambda_{l-1}T}\left([\tilde{\beta}_{\cdot l} \otimes \beta_{l\cdot}^{(-1)}]\,(Y_0 + Y_1) + o(1)\right), \text{ если } \operatorname{Re}\lambda_0 = 0, \tag{37}$$

$$X_0^\partial = e^{(\lambda_0-\lambda_{l-1})T}\left([\tilde{\beta}_{\cdot l} \otimes \beta_{l\cdot}^{(-1)}]\, Y_1 + o(1)\right), \text{ если } \operatorname{Re}\lambda_0 > 0. \tag{38}$$

Используя то, что оператор $[\tilde{\beta}_{\cdot l} \otimes \beta_{l\cdot}^{(-1)}]$ обладает проекционным свойством [3]:

$$[\tilde{\beta}_{\cdot l} \otimes \beta_{l\cdot}^{(-1)}]\, Y = (\beta_{l\cdot}^{(-1)}, Y)\,\tilde{\beta}_{\cdot l},$$

где Y — произвольный l-мерный вектор, из (36) — (38) получаем равенства (30) — (32), и теорема доказана.

Замечание 2. Теорему 2 можно обобщить на случай, когда граничные значения x_T^r $(r = \overline{1, l})$ зависят от T и известно асимптотическое поведение величины x_T^r при $T \to \infty$. Условие (29), ограничивающее рост правой части уравнения (1), также может быть ослаблено, если известно поведение $f(t)$ при $t \to \infty$.

Из теоремы 2 в результате несложных выкладок получаем следующее следствие.

Следствие 3. *Решение задачи* (1) — (3) *с постоянным коэффициентом на отрезке* $[0, T)$ *представимо* (*при* $T \to \infty$) *в следующем асимптотическом виде*:

$$x(t) = e^{-\lambda_{l-1}T}\left[(\beta_{l\cdot}^{(-1)}, Y_0)\, Q_2(t)\,\tilde{\beta}_{\cdot l} + O(\varepsilon_T)\right], \text{ если } \operatorname{Re}\lambda_0 < 0,$$

$$x(t) = e^{-\lambda_{l-1}T}\left[(\beta_{l\cdot}^{(-1)}, (Y_0 + Y_1))\, Q_2(t)\,\tilde{\beta}_{\cdot l} + O(\varepsilon_T)\right], \text{ если } \operatorname{Re}\lambda_0 = 0,$$

$$x(t) = e^{\lambda_0 T}\left\{e^{-\lambda_{l-1}T} Q_2(t)\left[(\beta_{l\cdot}^{(-1)}, Y_1)\,\dot{\beta}_{\cdot l} + O(\varepsilon_T)\right] + g(t)\right\}, \text{ если } \operatorname{Re}\lambda_0 > 0,$$

при этом $\varepsilon_T \to 0$, *если* $T \to \infty$; $Q_2(t) = \{q_{i,k+j};\ i = \overline{1, p};\ j = \overline{1, l}\}$, $g(t)$ — *функция, ограниченная на отрезке* $[0, T]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Великий А. П., Королюк В. С. Асимптотический подход к переносу граничных условий для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — УМЖ, 1977, **29**, № 1, с. 23—31.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., «Наука», 1969. 351 с.
3. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их применение. К., «Наук. думка», 1976. 182 с.

ГлавНИИВЦ
Госплана УССР

Поступила в редакцию
5.III.1977 г.