УДК 519.21

В. А. Дубко

Об усреднении для одного класса стохастических дифференциальных уравнений

При изучении движения ансамблей большого числа взаимодействующих частиц описание эволюции системы проводится при помощи методов статистической механики. В наиболее простом случае движение одной частицы в такой системе подчинено стохастическому уравнению вида

$$dv = \frac{1}{\varepsilon} F_1(t, x, v) + \frac{1}{\varepsilon} F_2(t, x, v)\, dw, \tag{1}$$

где $x(t)$ — траектория частицы; $v(t)$ — ее скорость; F_1 и F_2 — неслучайные функции; w — винеровский процесс, а ε — параметр, характеризующий частоту воздействий.

Рассмотрение предельного поведения составного процесса $\{x(t), v(t)\}$ при $\varepsilon \downarrow 0$ и определение требований к F_1 и F_2, обеспечивающих в результате этого предельного перехода превращение уравнения (1) в уравнение

$$dx = a(t, x)\,dt + B(t, x)\,dw, \tag{2}$$

где $a(t, x)$ и $B(t, x)$ — неслучайные, обосновывает вероятностную модель броуновской диффузии. В работе [1] найдены условия, оправдывающие такой предельный переход, когда скорость входит лишь в F_1 в виде слагаемого — μv, где μ — вязкость среды. В данной работе исследуется предельное поведение процесса x_t^ε, если коэффициенты уравнения (1) зависят только от v.

Рассмотрим уравнение

$$dv_t^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}\mu_\varepsilon v_t^\varepsilon\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\sigma_\varepsilon(v_t^\varepsilon)\,dw, \tag{1'}$$

где $\mu_\varepsilon > 0$; $\sigma_\varepsilon(v) > C$— положительная, непрерывная функция; C—некоторая константа, а $v_t^\varepsilon \in R^1$. Для v_t^ε, определяемого (1′), существует эргодическое распределение $\pi_\varepsilon(dv)$ [2, § 18].

Основной результат статьи выражает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть v_t^ε— решение уравнения (1′). Если выполнены условия:*

1) *существуют пределы*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mu_\varepsilon = \mu > 0, \quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int \pi_\varepsilon(dv)\,\sigma_\varepsilon^2(v) = B^2;$$

2) *существует такая постоянная K, для которой $\forall \varepsilon > 0$*

$$M|v_0^\varepsilon|^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}K, \quad M|v_0^\varepsilon|^4 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}K,$$

тогда последовательность процессов $x_t^\varepsilon = \int_0^t v_s^\varepsilon\,ds$ при $\varepsilon \downarrow 0$ будет слабо сходиться к решению уравнения

$$dx = \frac{B}{\mu}\,dt. \tag{2'}$$

Для доказательства потребуется следующая теорема.

Теорема 2 (см. [1]). *Пусть v_t^ε— марковский процесс и выполнены условия:*

1) *положим $a_t^\varepsilon = M[v_t^\varepsilon / v_0^\varepsilon = v]$. Существует $a^\varepsilon \in R^1$, для которого существует $\int_0^\infty [a_t^\varepsilon(v) - a^\varepsilon]\,dt$ и при некоторых C_1 и C_2*

$$\left|\int_0^\infty [a_t^\varepsilon(v) - a^\varepsilon]\,dt\right| \leqslant C_1|v| + C_2;$$

2) *обозначим* $A_t^\varepsilon = M\left[(v_t^\varepsilon - a^\varepsilon)\int_0^\infty (a_s^\varepsilon(v_t^\varepsilon) - a^\varepsilon)\,ds / v_0^\varepsilon = v\right]$.

Существует A^ε, для которого $\sup_t \int_0^t [A_s^\varepsilon(v) - A^\varepsilon]\,ds$ ограничен;

3) *существует $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} a^\varepsilon = a$ и $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} A^\varepsilon = A$;*

4) *существует такое σ_ε, $\sigma_\varepsilon \uparrow +\infty$ при $\varepsilon \downarrow 0$ и $\tilde{K}$, для которого $\forall t \geqslant 0$*

$$M|v_t^\varepsilon|^2 \leqslant \tilde{K}\sigma_\varepsilon \quad \text{при} \quad M|v_0^\varepsilon|^2 \leqslant \sigma_\varepsilon, \qquad M|v_t^\varepsilon|^4 \leqslant \tilde{K}\sigma_\varepsilon^2 \quad \text{при} \quad M|v_0^\varepsilon|^4 \leqslant \sigma_\varepsilon^2;$$

5)

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\sup_{t>0}\sup_{v}\frac{\sigma_\varepsilon}{1+|v|}\left|\int_0^t [a_s^\varepsilon(v)-a^\varepsilon]\,ds\right|<\infty;$$

6)

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\sup_{t>\delta}\sup_{v}\frac{\sigma_\varepsilon}{1+|v|}\left|\int_\delta^t [a_s^\varepsilon(v)-a^\varepsilon]\,ds\right|<\infty;$$

7)

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{v}\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon+|v|^2}\left|\int_0^t [A_s^\varepsilon(v)-A^\varepsilon]\,ds\right|=0,$$

тогда, каковы бы ни были начальные условия v_0^ε, *удовлетворяющие условию* $M|v_0^\varepsilon|^4\leqslant\sigma_\varepsilon^2$, *последовательность процессов* $x_t^\varepsilon=\int_0^t v_t^\varepsilon\,ds$ *при* $\varepsilon\downarrow 0$ *будет слабо сходиться к винеровскому процессу* $z(t)$, *для которого*

$$Mz(t)=ta,\quad M[z(t)-ta]^2=2tA.$$

Прежде чем доказывать теорему 1, установим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Положим* $\varphi_\varepsilon(v,s)=\frac{1}{\mu_\varepsilon^2}M[\sigma_\varepsilon^2(v_s^\varepsilon)/v]$. *Если выполнено условие* 1) *теоремы* 1, *то справедлива оценка*

$$\left|\int_0^t\{\varphi_\varepsilon(s,v)-\varphi_\varepsilon(s,0)\}\,ds\right|\leqslant\varepsilon^{3/2}\beta|\bar v|,\quad \beta<\infty.$$

Доказательство. Воспользовавшись оценкой [2], с. 137, 109, находим:

$$\left|\int_0^t\varphi_\varepsilon(s,v)\,ds-\int_0^t\varphi_\varepsilon(s,0)\,ds\right|\leqslant\frac{2K_1^2}{\mu_\varepsilon^2}M\tau_{v,0},\tag{3}$$

где $K_1=\sup_{\varepsilon v}\sigma_\varepsilon(v)$,

$$M\tau_{v,0}=\begin{cases}\lim\limits_{c\uparrow\infty}M\tau_v[-c,0] & \text{при } v<0,\\ \lim\limits_{c\uparrow\infty}M\tau_v[0,c] & \text{при } v>0,\end{cases}$$

а $\tau_v[a,b]$ — момент первого достижения случайным процессом $v_t^\varepsilon\,(v_t^\varepsilon|_{t=0}=v)$ границ интервала $[a,b]$.

Используя точное выражение для $M\tau_v[0,c]$ (см. [2], с. 109—110), перейдем в нем к пределу $c\uparrow\infty$:

$$M\tau_{v,0}=2\varepsilon^2\lim_{c\uparrow\infty}\left[-\int_0^v\Phi(y)\int_0^y\frac{dz}{\sigma_\varepsilon^2(z)\Phi(z)}\,dy+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\int_0^c\Phi(y)\int_0^y\frac{dz}{\sigma_\varepsilon^2(z)\Phi(z)}\,dy}{\int_0^c\Phi(z)\,dz}\right)\int_0^v\Phi(z)\,dz\right],$$

где $\Phi(x)=\exp\left\{2\varepsilon\mu_\varepsilon\int\limits_0^x \frac{u}{\sigma_\varepsilon^2(u)}\,du\right\}$. Тогда

$$M\tau_{v,0}=2\varepsilon^2\left[-\int\limits_0^v \Phi(y)\int\limits_0^y \frac{dz}{\sigma_\varepsilon^2(z)\,\Phi(z)}\,dy+\int\limits_0^\infty \frac{dz}{\sigma_\varepsilon^2(z)\,\Phi(z)}\int\limits_0^v \Phi(z)\,dz\right]\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon^2\int\limits_0^v \Phi(y)\int\limits_y^\infty \frac{dz}{\sigma_\varepsilon^2(z)\,\Phi(z)}\,dy\leqslant\frac{2\varepsilon^2}{K_1}\int\limits_0^v dy\int\limits_0^\infty \exp\left\{-2\varepsilon\mu_\varepsilon\int\limits_0^v\frac{(u+y)}{\sigma_\varepsilon^2(u+v)}\,du\right\}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\varepsilon^2}{K_1}\int\limits_0^v dy\int\limits_0^\infty \exp\left\{\frac{-2\varepsilon\mu_\varepsilon yx}{\inf\sigma_\varepsilon^2(y)}\right\}\exp\left\{-2\varepsilon\mu_\varepsilon\int\limits_0^x\frac{u\,du}{\sigma_\varepsilon^2(u+y)}\right\}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon^{3/2}K_1\pi}{K_2\sqrt{\mu_\varepsilon}}\,|v|,$$

где $K_2=\inf\limits_{\varepsilon,u}\sigma_\varepsilon(u)$. Точно такое же доказательство и для случая $v<0$. Поэтому $M\tau_{v,0}\leqslant\varepsilon^{3/2}\beta_{0,\varepsilon}|v|$, где $\beta_{0,\varepsilon}=\frac{\pi K_1}{\mu_\varepsilon^{1/2}K_2}$. Подставив полученную оценку в (3), приходим к доказательству леммы 1.

Используя лемму 1, определим вид A_t^ε и a_t^ε для рассматриваемой модели и установим их предельные свойства при $\varepsilon\downarrow 0$.

Воспользовавшись определением $a_t^\varepsilon(v)$ из условия 1) теоремы 2 и уравнением (1′), находим:

$$da_t^\varepsilon(v)=-\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}\,a_t^\varepsilon(v)\,dt,$$

$$a_t^\varepsilon(v)\,|_{t=0}=v,$$

откуда

$$a_t^\varepsilon(v)=v\exp\left\{-\frac{\mu_\varepsilon t}{\varepsilon}\right\}. \tag{4}$$

Выражение для $A_t^\varepsilon(v)$ из условия 2) теоремы 2 в этом случае имеет вид

$$A_t^\varepsilon(v)=\frac{\varepsilon}{\mu_\varepsilon}\,M\,[(v_t^\varepsilon)^2/v]. \tag{5}$$

Дифференцируя его, используя формулу Ито (см. [2], с. 25), находим:

$$dA_t^\varepsilon(v)=-A_t^\varepsilon(v)\,dt+\frac{1}{\varepsilon\mu_\varepsilon}\,M\,[\sigma_\varepsilon^2(v_t^\varepsilon)/v]\,dt,$$

$$A_t^\varepsilon(v)\,|_{t=0}=\frac{\varepsilon}{\mu_\varepsilon}\,v^2.$$

Следовательно,

$$A_t^\varepsilon=\frac{\varepsilon}{\mu_\varepsilon}\left\{\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^t e^{-\frac{\mu_\varepsilon(t-s)}{\varepsilon}}\,M\,[\sigma_\varepsilon^2(v_t^\varepsilon)/v]\,ds+v^2e^{-\frac{2\mu_\varepsilon t}{\varepsilon}}\right\}. \tag{5′}$$

В силу условий теоремы 1 существует плотность эргодического распределения $P_\varepsilon(v)$ (см. [2], § 18):

$$P_\varepsilon(v)=\frac{C_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon^2(v)}\exp\left\{-2\varepsilon\mu_\varepsilon\int_0^v\frac{u}{\sigma_\varepsilon^2(u)}du\right\}dv, \tag{6}$$

где

$$C_\varepsilon^{-1}=\int\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2(v)}\exp\left\{-2\varepsilon\mu_\varepsilon\int_0^v\frac{u}{\sigma_\varepsilon^2(u)}du\right\}dv.$$

Если положить $A^\varepsilon=\dfrac{1}{2\mu_\varepsilon^2}\displaystyle\int P_\varepsilon(u)\,\sigma_\varepsilon^2(u)\,du$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Если выполнено условие* 1) *теоремы* 1, *то*

$$\sup_v\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon}v^2}\left|\int_0^t[A_s^\varepsilon(v)-A^\varepsilon]\,ds\right|=O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})\quad\forall t>0, \tag{7}$$

где $1\leqslant\beta_\varepsilon<\infty$.

Доказательство. Подставив (5′) в (7), получим

$$\sup_v\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon}v^2}\left|\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^t d\tau\left\{\int_0^\tau e^{\frac{-2\mu_\varepsilon(\tau-s)}{\varepsilon}}\varphi_\varepsilon(s,v)\,ds+v^2e^{\frac{-2\tau\mu_\varepsilon}{\varepsilon}}-A^\varepsilon\right\}\right|.$$

В этом выражении $\sup\limits_v\dfrac{\varepsilon v^2\displaystyle\int_0^t\exp\left\{-\frac{2\tau\mu_\varepsilon}{\varepsilon}\right\}d\tau}{1+\frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon}v^2}=O(\varepsilon)$. Так как

$$\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^\tau d\tau ds e^{-\frac{2(\tau-s)\mu_\varepsilon}{\varepsilon}}\varphi_\varepsilon(s,v)=\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}\iint\limits_{0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant t}d\tau ds e^{-\frac{2(\tau-s)\mu_\varepsilon}{\varepsilon}}\varphi_\varepsilon(s,v)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t ds\varphi_\varepsilon(s,v)\left[1-e^{-\frac{2\mu_\varepsilon(t-s)}{\varepsilon}}\right]=\frac{1}{2}\int_0^t\varphi_\varepsilon(s,v)\,ds+o(\varepsilon),$$

то

$$\sup_v\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon}v^2}\left|\int_0^t[A_s^\varepsilon(v)-A^\varepsilon]\,ds\right|=$$

$$=\sup_v\frac{1}{2\left(1+\frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon}v^2\right)}\left|\int_0^t\{\varphi_\varepsilon(s,v)-2A^\varepsilon\}\,ds\right|+O(\varepsilon).$$

По определению,

$$2A^\varepsilon=\int duP_\varepsilon(u)\,\frac{\sigma_\varepsilon^2(u)}{\mu_\varepsilon^2}=\iint du\,P_\varepsilon(u)\,P_\varepsilon(0,u;s,dv)\,\frac{\sigma_\varepsilon^2(v)}{\mu_\varepsilon^2}=$$

$$=\int P_\varepsilon(u)\,\varphi_\varepsilon(s,u)\,du.$$

Используя формулу (6) и лемму 1, находим:

$$\int_0^t \{\varphi_\varepsilon(s,v) - 2A^\varepsilon\}\, ds = \int P_\varepsilon(u)\left[\int_0^t \{\varphi_\varepsilon(s,v) - \varphi_\varepsilon(s,u)\}\, ds\right] du \leqslant$$

$$\leqslant \int P_\varepsilon(u)\left|\int_0^t \{\varphi_\varepsilon(s,v) - \varphi_\varepsilon(s,0)\}\, ds\right| du +$$

$$+ \int P_\varepsilon(u)\left|\int_0^t \{\varphi_\varepsilon(s,v) - \varphi_\varepsilon(s,0)\}\, ds\right| du \leqslant |v|\, \varepsilon^{3/2}\beta_{1,\varepsilon} + \varepsilon\beta_{2,\varepsilon},$$

где $\beta_{1,\varepsilon} = \frac{2\beta_{0,\varepsilon}K_1}{\mu_\varepsilon^{3/2}}$, $\beta_{2,\varepsilon} = \frac{2\beta_{0,\varepsilon}K_1^2}{\mu_\varepsilon \pi^{1/2}}$.

Следовательно,

$$\sup_v \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon} v^2}\left|\int_0^t [A_s^\varepsilon(v) - A^\varepsilon]\, ds\right| =$$

$$= \sup_v \left[\frac{\varepsilon\,|v|\,\beta_{1,\varepsilon} + \varepsilon^{1/2}\beta_{2,\varepsilon}}{1 + \frac{\varepsilon}{\beta_\varepsilon} v^2}\right] \varepsilon^{1/2} + O(\varepsilon) = O(\varepsilon^{1/2}).$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при указанных в ней ограничениях выполнены условия теоремы 2.

1′) Если $a^\varepsilon = 0$, то, учитывая вид a_t^ε (4), находим:

$$\int_0^\infty v e^{-\frac{\mu_\varepsilon t}{\varepsilon}}\, dt = -v\frac{\varepsilon}{\mu_\varepsilon}.$$

2′) Положим $A^\varepsilon = \frac{1}{2\mu_\varepsilon^2}\int P_\varepsilon(u)\,\sigma_\varepsilon^2(u)\, du$, где $P_\varepsilon(u)$ определяется формулой (6). Тогда на основании леммы 2

$$\sup_t \left|\int_0^t [A_\tau^\varepsilon(v) - A^\varepsilon]\, d\tau\right| \leqslant O(\varepsilon^{1/2})\,(1 + v^2).$$

3′) Из условия 1′) следует, что $a^\varepsilon = 0$. $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} A^\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_\varepsilon}$ согласно условию 2′) и по условию 1) теоремы 1.

4′) Используя условия 1), 2) теоремы 1, а также (5), (5′) и заменяя $M[\sigma_\varepsilon^2(v_t^\varepsilon)/v]$ на $\sup \sigma_\varepsilon^2(v)$, находим:

$$M|v_t^\varepsilon|^2 \leqslant \frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon}\left|\frac{1}{2\mu_\varepsilon^2}\sup_v \sigma_\varepsilon^2(v)\,(1 - e^{\frac{-2\mu_\varepsilon t}{\varepsilon}}) - Ke^{\frac{-2t\mu_\varepsilon}{\varepsilon}}\right|.$$

Выражение под модулем справа — величина, ограниченная $\forall t > 0$. Если построить уравнение для $M|v_t^\varepsilon|^4$, то, проведя подобные оценки, можно убедиться, что и второе условие условия 4) теоремы 2 выполнено.

5′) Так как

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\varepsilon|v|}{\max\{K,1\}}\right)}\left|\int\limits_0^\Delta ve^{\frac{-\mu_\varepsilon t}{\varepsilon}}dt\right| \leqslant \frac{\max\{K,1\}|v|}{\mu_\varepsilon(|v|+1)} < \infty,$$

то условие 5) теоремы 2 выполнено.

6′) Условие 6) теоремы 2 следует из соотношения

$$\sup_{t>\delta}\sup_{v}\frac{\mu_\varepsilon}{\varepsilon(|v|+1)}\left|\int\limits_\delta^t ve^{\frac{-s\mu_\varepsilon}{\varepsilon}}ds\right| = \sup_{t>\delta}\sup_{v}\frac{|v|}{1+|v|}\left|e^{\frac{-\delta\mu_\varepsilon}{\varepsilon}} - e^{\frac{-t\mu_\varepsilon}{\varepsilon}}\right| = o(\varepsilon).$$

7′) Условие 7) теоремы 2 выполнено в силу оценок, проделанных в леммах 1, 2.

Автор выражает благодарность А. В. Скороходу за постановку задачи и помощь при ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скороход А. В. Об усреднении стохастических уравнений математической физики. — В кн.: Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, К., «Наук. думка», 1977, с. 196—208.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. К., «Наук. думка», 1968. 353 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
21.IV. 1977 г.