УДК 519.5

В. А. Дудас

Приближение сопряженных периодических функций суммами Валле-Пуссена

Через $W^r H_\omega$ обозначим класс 2π-периодических функций, r-е (r — целое, $r \geqslant 0$) производные которых $f^{(r)}(t)$ имеют модули непрерывности, не превышающие заданных модулей $\omega(t)$:

$$|f^{(r)}(t) - f^{(r)}(t')| \leqslant \omega(|t - t'|). \tag{1}$$

При $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, будем писать $f \in W^r H^\alpha$, если $r=0$, $f \in H_\omega$ ($f \in H^\alpha$), $\overline{W^r H}_\omega$, $r \geqslant 0$, — сопряженные классы функций к функциям $f(t)$.

В [1, 2] рассмотрены полиномы вида

$$V_{n,m}(f; x) = \frac{1}{m} \sum_{k=n-m}^{n-1} S_k(f; x), \tag{2}$$

где $S_k(f; x)$ — частные суммы ряда Фурье. В настоящее время полиномы вида (2) называют суммами Валле-Пуссена.

Задача отыскания асимптотически точного закона убывания величин

$$\mathcal{E}_{V_{n,m}}(\mathfrak{M}) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \| f(x) - V_{n,m}(f; x) \|_C \tag{3}$$

рассматривалась в работах [3—9]. В [4] для произвольных $r \geqslant 0$, $0<\alpha\leqslant 1$ и $m=0(n)$ установлены асимптотические равенства на классах $W^r H^\alpha$ и $\overline{W^r H^\alpha}$, а в [8, 9] содержится решение задачи (3) на классах $W^r H_\omega$ и $\overline{W^r H_\omega}$, однако при $m=O(n)$ порядок главного члена совпадает с порядком остаточного члена $O\left(\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

В [2] рассмотрены также суммы вида

$$V_{2n,n}(f;x)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f;x). \tag{4}$$

Сопряженные суммы $\bar{V}_{2n,n}(f;x)$ имеют вид

$$\bar{V}_{2n,n}(f;x)=\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\bar{S}_k(f;x)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}}{2}+\frac{\sin n(t-x)-\sin 2n(t-x)}{4n\sin^2\frac{t}{2}}\right)dt. \tag{5}$$

Пусть $f(t)\in H_\omega$ — нечетная и такая, что $f(0)=0$, то

$$\bar{f}(0)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt \tag{6}$$

и

$$\bar{V}_{2n,n}(f;0)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{2}+\frac{\sin nt-\sin 2nt}{4n\sin^2\frac{t}{2}}\right)dt. \tag{7}$$

Тогда

$$\bar{V}_{2n,n}(f)\overset{\mathrm{df}}{=}\bar{f}(0)-\bar{V}_{2n,n}(f;0)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,\bar{v}_{2n,n}(t)\,dt, \tag{8}$$

где

$$\bar{v}_{2n,n}(t)=\frac{1}{n}\,\frac{\sin nt-\sin 2nt}{4\sin^2\frac{t}{2}}. \tag{9}$$

Использовав равенство $\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}=4\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k\pi+t)^2}$, а также подстановку $z=$ $=nt$, получим

$$\bar{V}_{2n,n}(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\varphi(t)\,dt, \tag{10}$$

где

$$\varphi(t)=\frac{\sin t-\sin 2t}{t^2}. \tag{11}$$

Пусть t_k — простые нули функции $\varphi(t)$ и x_k — нули функции

$$\psi(x)=\int_x^\infty \varphi(t)\,dt,\ x>0.$$

В данной работе установлена оценка сверху для величин $\mathcal{E}_{\overline{V}_{2n,n}}(\overline{H}_\omega)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть t_k — нули функции $\varphi(t)$, x_k $(k=0,1,2,\ldots)$ — нули функции $\psi(x)$. На классе $\overline{H}_\omega$ для всех натуральных n имеет место неравенство*

$$\mathcal{E}_{\overline{V}_{2n,n}}(\overline{H}_\omega)=\sup_{f\in H_\omega}\|\overline{f}(x)-\overline{V}_{2n,n}(f;x)\|_C\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{x_0}\omega_n(t)\,|\varphi(t)|\,dt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\left(\left|\int_{x_0}^{\frac{\pi}{3}}\varphi(t)\,\omega_n(\rho_0(t)-t)\,dt\right|+\sum_{k=1}^\infty\left(\left|\int_{x_{2k-1}}^{(2k-1)\pi}\varphi(t)\,\omega_n(\rho_{2k-1}(t)-t)\,dt\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\int_{x_{2k}}^{t_1^{(2k)}}\varphi_1^{(2k)}(t)\omega_n(\rho_{2k}^{(1)}(t)-t)dt\right|+\sum_{i=2}^4\left|\int_{t_{i-1}^{(2k)}}^{\left(2k+\frac{i-3}{3}\right)\pi}\varphi_1^{(2k)}(t)\,\omega_n(\rho_{2k}^{(i)}(t)-t)dt\right|\right)\right)<$$

$$<\frac{2}{\pi}\int_0^{x_0}\omega_n(t)\,|\varphi(t)|\,dt+\frac{2}{\pi x_0}\,\omega\left(\frac{4\pi}{3n}\right),\tag{12}$$

где $\omega_n(t)\equiv\omega\left(\frac{t}{n}\right)$, $\varphi(t)=\frac{\sin t-\sin 2t}{t^2}$, $\psi(t)=\int_x^\infty\varphi(t)\,dt$, *а* $\rho_k(t)$ — *функции, определяющиеся условиями* $\psi(t)=\psi(\rho_k(t))$, $x_k\leqslant t\leqslant t_k\leqslant\rho_k(t)\leqslant x_{k+1}$ *(см. [10], лемма 2).*

Для доказательства теоремы необходимо установить справедливость следующей леммы.

Лемма. *Функция* $\psi(x)=\int_x^\infty\frac{\sin t-\sin 2t}{t^2}\,dt$ *на каждом интервале* $((k-1)\pi,k\pi)$, $k=2,3,\ldots$, *имеет единственный простой нуль* x_k, *а при* $k=1$ — *два простых нуля, т. е.* $x_0\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right)$; $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$.

Доказательство. Заметим, что функция $\varphi(t)$ меняет знак в точках $\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,\ldots$; $2k\pi$, $k=1,2,\ldots$. Покажем сначала, что при всех $k=1,2,\ldots$

$$\operatorname{sign}\psi(k\pi)=(-1)^k.\tag{13}$$

Интегрируя $\psi(x)$ по частям, получаем

$$\psi(x)=\frac{\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x}{x^2}+2\,\frac{\sin x-\frac{1}{4}\sin 2x}{x^3}-6\int_x^\infty\frac{\sin t-\frac{1}{4}\sin 2t}{t^4}\,dt,\tag{14}$$

$$\psi(k\pi)=\frac{(-1)^k-\frac{1}{2}}{(k\pi)^2}-6\int_{k\pi}^\infty\frac{\sin t-\frac{1}{4}\sin 2t}{t^4}\,dt.\tag{15}$$

Легко показать, что при $k \geqslant 2$ имеет место неравенство

$$\left| 6 \int_{k\pi}^{\infty} \frac{\sin t - \frac{1}{4} \sin 2t}{t^4} dt \right| < \left| \frac{(-1)^k - \frac{1}{2}}{(k\pi)^2} \right|. \tag{16}$$

Из соотношения (15) и неравенства (16) следует

$$\operatorname{sign} \psi (k\pi) = \operatorname{sign} \left(\frac{(-1)^k - \frac{1}{2}}{(k\pi)^2} \right) = (-1)^k \text{ при } k \geqslant 2.$$

При $k = 1$ справедливость равенства (13) непосредственно проверяется при помощи таблиц [11].

Из равенства (13) видно, что каждый интервал $((k-1)\pi, k\pi)$, $k = 2, 3, \ldots$, содержит нуль функции $\psi(x)$.

Используя равенство (14), легко доказать следующие равенства:

$$\begin{gathered}\operatorname{sign} \psi \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \pi \right) = - \operatorname{sign} \psi \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{\pi}{6} \right), \; k \geqslant 3, \; k = 2l - 1, \\ \operatorname{sign} \psi \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{\pi}{6} \right) = - \operatorname{sign} \psi \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \pi \right), \; k \geqslant 4, \; k = 2l,\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{sign} \psi \left(\frac{\pi}{12} \right) = - \operatorname{sign} \psi \left(\frac{\pi}{6} \right), \\ \operatorname{sign} \psi \left(\frac{\pi}{2} \right) = - \operatorname{sign} \psi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right), \\ \operatorname{sign} \psi \left(\frac{3}{2} \pi \right) = - \operatorname{sign} \psi \left(\frac{3}{2} \pi + \frac{\pi}{6} \right).\end{gathered} \tag{18}$$

Из равенств (17) и (18) следует, что

$$x_0 \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6} \right), \; x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right), \; x_2 \in \left(\frac{3}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi + \frac{\pi}{6} \right),$$

$$x_k \in \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \pi, \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{\pi}{6} \right) \text{ при } k \geqslant 3 \text{ и } k = 2l - 1,$$

$$x_k \in \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \pi - \frac{\pi}{6}, \left(k - \frac{1}{2} \right) \pi \right) \text{ при } k \geqslant 4 \text{ и } k = 2l.$$

Из исследования производной функции $\psi(x)$, а также из соотношений (13), (17) и (18) следует, что на каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$ при $k \geqslant 2$ функция $\psi(x)$ имеет единственный простой нуль x_k, а на интервале $(0, \pi)$ — два простых нуля x_0 и x_1.

Доказательство теоремы. Прежде всего заметим, что

$$\mathscr{E}_{\bar{V}_{2n,n}} (\bar{H}_\omega) = \sup_{f \in H_\omega^0} |\bar{f}(0) - \bar{V}_{2n,n} (f; 0)|,$$

где H_ω^0 — подкласс функций $f(t)$ из класса H_ω^0 таких, что $f(0) = 0$. Согласно (10) имеем

$$\mathscr{E}_{\bar{V}_{2n,n}} (\bar{H}_\omega) = \sup_{f \in H_\omega^0} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f\left(\frac{t}{n} \right) \varphi(t)\, dt \right|.$$

Если $f(t) \in H^0_\omega$, то $f\left(\frac{t}{n}\right)$ принадлежит классу $H^0_{\omega_n}$-функций, $2n\pi$-периодических, нечетных, обращающихся в нуль в начале координат и, кроме того, удовлетворяющих условиям $|f(t) - f(t')| \leqslant \omega_n(|t - t'|)$, где $\omega_n(t) \equiv \equiv \omega\left(\frac{t}{n}\right)$. Далее имеем

$$\bar{V}_{2n,n}(f) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{x_0} f(t)\,\varphi(t)\,dt + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{19}$$

где x_k — нули функции $\psi(x)$.

В связи с тем, что каждый из отрезков $[x_{2k}, x_{2k+1}]$ при $k = 1, 2, \ldots$ содержит три нуля функции $\varphi(t)$, сумму, стоящую в правой части равенства (19), разобьем на части следующим образом:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\varphi(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\,\varphi(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} f(t)\,\varphi(t)\,dt + \int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+1}} f(t)\,\varphi(t)\,dt\right)\right). \tag{20}$$

На каждом отрезке $[x_{2k}, x_{2k+1}]$, $k=1, 2, \ldots$, функцию $\varphi(t)$ представим в виде

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i^{(2k)}(t), \tag{21}$$

где

$$\varphi_1^{(2k)}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } x_{2k} \leqslant t \leqslant t_1^{(2k)}, \\ 0, & \text{если } t_1^{(2k)} \leqslant t \leqslant t_4^{(2k)}, \\ \varphi(t), & \text{если } t_4^{(2k)} \leqslant t \leqslant x_{2k+1}, \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(2k)}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{2k} \leqslant t \leqslant t_{i-1}^{(2k)}, \\ \varphi(t), & \text{если } t_{i-1}^{(2k)} \leqslant t \leqslant t_i^{(2k)}, \\ 0, & \text{если } t_i^{(2k)} \leqslant t \leqslant x_{2k+1}, \end{cases} \tag{22}$$

при $k = 1, 2, \ldots$ и $i = 2, 3, 4$.

Точки $t_i^{(2k)}$, $i = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2, \ldots$, подобраны таким образом, чтобы

$$\int\limits_{t_{i-1}^{(2k)}}^{t_i^{(2k)}} \varphi_i^{(2k)}(t)\,dt = 0, \quad i = 2, 3, 4. \tag{23}$$

Учитывая равенства (21) и (22), правую часть равенства (20) запишем в виде

$$\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{x_0}^{x_1} f(t)\,\varphi(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} f(t)\,\varphi(t)\,dt + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+1}} f(t)\,\varphi_1^{(2k)}(t)\,dt + \sum_{i=2}^{4}\int\limits_{t_{i-1}^{(2k)}}^{t_i^{(2k)}} f(t)\,\varphi_i^{(2k)}(t)\,dt\right)\right). \tag{24}$$

Тогда для любой функции $f(t) \in H^0_{\omega_n}$ получим

$$|V^{-}_{2n,n}(f) \leqslant \sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{x_0} f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| + \frac{2}{\pi} \left(\sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| + \sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \int_{x_{2k}}^{x_{2k+1}} f(t)\,\varphi_1^{(2k)}(t)\,dt \right| + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=2}^{4} \sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \int_{t_{i-1}^{(2k)}}^{t_i^{(2k)}} f(t)\,\varphi_i^{(2k)}(t)\,dt \right| \right)\right). \qquad (25)$$

Поскольку при $t \in (0, x_0)$ $\varphi(t) < 0$, то

$$\sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{x_0} f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| = -\frac{2}{\pi} \int_0^{x_0} \omega_n(t)\,\varphi(t)\,dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{x_0} \omega_n(t)\,|\,\varphi(t)\,|\,dt. \qquad (26)$$

Далее имеем (см. [10], лемма 2)

$$\sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{\frac{\pi}{3}} \varphi(t)\,\omega_n(\rho_0(t) - t)\,dt \right|,$$

$$\sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k}} f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_{x_{2k-1}}^{(2k-1)\pi} \varphi(t)\,\omega_n(\rho_{2k-1}(t) - t)\,dt \right|,$$

$$\sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \int_{x_{2k}}^{x_{2k+1}} f(t)\,\varphi_1^{(2k)}(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_{x_{2k}}^{t_i^{(2k)}} \varphi_1^{(2k)}(t)\,\omega_n(\rho_{2k}^{(1)}(t) - t)\,dt \right|, \qquad (27)$$

$$\sup_{f \in H^0_{\omega_n}} \left| \int_{t_{i-1}^{(2k)}}^{t_i^{(2k)}} f(t)\,\varphi_i^{(2k)}(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int_{t_{i-1}^{(2k)}}^{\left(2k+\frac{i-3}{3}\right)\pi} \varphi_i^{(2k)}(t)\,\omega_n(\rho_{2k}^{(i)}(t) - t)\,dt. \right.$$

Учитывая неравенство (25) и равенства (26), (27), получаем

$$\mathscr{E}_{\overline{V}_{2n,n}}(\overline{H}_\omega) \leqslant \frac{2}{\pi} \int^{x_0} \omega_n(t)\,|\,\varphi(t)\,|\,dt + \frac{2}{\pi} \left(\left| \int_{x_0}^{\frac{\pi}{3}} \varphi(t)\,\omega_n(\rho_0(t) - t)\,dt \right| + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left| \int_{x_{2k-1}}^{(2k-1)} \varphi(t)\,\omega_n(\rho_{2k-1}(t) - t)\,dt \right| + \left| \int_{x_{2k}}^{t_1^{(2k)}} \varphi_1^{(2k)}(t)\,\omega_n(\rho_{2k}^{(1)}(t) - t)\,dt \right| + \right.$$

$$\left.\left. + \sum_{i=2}^{4} \left| \int_{t_{i-1}^{(2k)}}^{\left(2k+\frac{i-3}{3}\right)\pi} \varphi_i^{(2k)}(t)\,\omega_n(\rho_{2k}^{(i)}(t) - t)\,dt \right| \right)\right). \qquad (28)$$

Учитывая, что $\rho_{2k}(t)-t \leqslant x_{k+1}-x_k$, $\rho_k^{(i)}(t)-t<\frac{2\pi}{3}$ при $i=2, 3, 4$, имеем

$$\mathcal{E}_{\bar V_{2n,n}}(\bar H_\omega)<\frac{2}{\pi}\int_0^{x_0}\omega_n(t)\,|\,\varphi(t)\,|\,dt+\frac{2}{\pi}\left(\omega\left(\frac{7\pi}{12n}\right)\int_{x_0}^{\frac{\pi}{3}}|\,\varphi(t)\,|\,dt+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\int_{x_{2k-1}}^{(2k-1)\pi}|\,\varphi(t)\,|\,dt+\omega\left(\frac{4\pi}{3n}\right)\int_{x_{2k}}^{t_i^{(2k)}}|\,\varphi_1^{(2k)}(t)\,|\,dt+\right.$$

$$\left.\left.+\,\omega\left(\frac{2\pi}{3n}\right)\sum_{i=2}^{4}\int_{t_{i-1}^{(2k)}}^{\left(2k+\frac{i-3}{3}\right)\pi}|\,\varphi_i^{(2k)}(t)\,|\,dt\right)\right). \qquad (29)$$

Из неравенства (25) после несложных преобразований получим неравенство (12), т. е. для любой функции

$$\mathcal{E}_{\bar V_{2n,n}}(\bar H_\omega)<\frac{2}{\pi}\int_0^{x_0}\omega_n(t)\,|\,\varphi(t)\,|\,dt+\frac{2}{\pi x_0}\,\omega\left(\frac{4\pi}{3n}\right).$$

Теорема доказана.

Замечание. Оценка величины $\mathcal{E}_{\bar V_{2n,n}}(\bar H_\omega)$ имеет смысл только тогда, когда выполнено условие $\int_0^{1/n}\frac{\omega(t)}{t}\,dt=O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. La Vallèe Poussin Ch. Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable rèelle par des expessions d'ordre donnè.—Compt. rendus, 1918, **166**, p. 799—802.
2. La Vallèe Poussin Ch. Legons sur l'approximation des fonctions d'une variable rèelle. Paris, Gauthier — Villars, 1919. 150 p.
3. Щербина А. Д. Об одном методе суммирования рядов, сопряженных рядом Фурье. — Мат. сб., 1950, **27**, № 2, с. 157—170.
4. Тиман А. Ф. Аппроксимативные свойства линейных методов суммирования рядов Фурье. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1953, **17**, № 1, с. 99—134.
5. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960. 684 с.
6. Теляковский С. А. Приближение дифференцируемых функций суммами Валле-Пуссена. — ДАН СССР, 1958, **121**, № 3, с. 426—430.
7. Теляковский С. А. Приближение функций, дифференцируемых в смысле Вейля, суммами Валле-Пуссена.—ДАН СССР, 1960, **131**, № 2, с. 259—269.
8. Ефимов А. В. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. I. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, **23**, № 5, с. 737—770.
9. Ефимов А. В. О приближении периодических функций суммами Валле-Пуссена. II. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1960, **24**, № 3, с. 431—468.
10. Корнейчук Н. П. О приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна — Рогозинского. — ДАН СССР, 1959, **125**, № 2, с. 258—261.
11. Таблицы интегрального синуса и косинуса. М., Физматгиз, 1954. 472 с.

Ровенский
педагогический институт

Поступила в редакцию
9.I. 1978 г.