УДК 517.53

В. А. Зморович, И. К. Коробкова

О порядке звездности некоторых подклассов α-выпуклых функций при $\alpha \geqslant 0$

В статье [1] высказана гипотеза: что из всех α-выпуклых функций при $\alpha \geqslant 0$ наименьшим порядком звездности в круге $|z| < 1$ обладает функция, удовлетворяющая уравнению

$$(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = \frac{1+z}{1-z}. \tag{1}$$

В данной заметке доказывается общая теорема, из которой следует, в качестве частного случая, подтверждение упомянутой гипотезы.

Обозначим через D выпуклую область, расположенную в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ и содержащую точку $w = 1$. Класс регулярных в круге E $(z : |z| < 1)$ функций $q(z)$, нормированных условием $q(0) = 1$ и принимающих в E значение из D, обозначим через $Q(D)$.

Пусть $q_0(z)$ — та функция класса $Q(D)$, которая отображает однолистно и конформно E на D при условии $q'(0) > 0$. Через D_r, $r \in (0, 1)$, обозначим образ круга $|z| \leqslant r$ при отображении $w = q_0(z)$. Тогда, как известно, любая функция $q(z) \in Q(D)$ преобразует (вообще говоря, неоднолистно) круг $|z| \leqslant r$ в область, содержащуюся строго внутри D, если $q(z)$ не совпадает с функцией вида $q_0(z\varepsilon)$, где $|\varepsilon| = 1$.

Условимся обозначать через $M(\alpha, D)$ $(\alpha \geqslant 0)$ класс регулярных в E функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, удовлетворяющих условию

$$(1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)=q(z), \tag{2}$$

где $q(z) \in Q(D)$. Класс $M(\alpha, D)$ — подкласс класса α-выпуклых функций $(\alpha \geqslant 0)$, совпадающий с ним при условии, что область D — полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$. Будем обозначать через $f_0(z)$ ту из функций класса $M(\alpha, D)$, которая определяется уравнением (2) при $q(z) \equiv q_0(z)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Из всех функций класса $M(\alpha, D)$ $(\alpha \geqslant 0)$ наименьшим порядком звездности в E обладают функции $e^{-i\theta} f_0(e^{i\theta} z)$, где θ — произвольное вещественное число, и только они.*

Доказательство. Обозначим $\frac{zf'(z)}{f(z)}=p(z)$; тогда из (2) следует

$$p(z)+\alpha\frac{zp'(z)}{p(z)}=q(z). \tag{3}$$

Это уравнение Бернулли. Решая его при условии $p(0)=1$, при $\alpha>0$ получаем

$$\frac{1}{p(z)}=\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\int_t^1\frac{1-q(z\tau)}{\tau}\,d\tau\right)dt, \tag{4}$$

где $t>0$ и $\tau>0$.

Отсюда видим, что функция $\frac{1}{p(z)}$ голоморфна в E, а следовательно, $p(z)$ мероморфна в E. Из уравнения (3) легко заключить, что $p(z)$ может иметь только простые полюсы.

Пусть ближайший к точке $z=0$ полюс $p(z)$ в E есть c, где $0<|c|<1$. Тогда в окрестности точки $z=c$ разложение $p(z)$ в ряд Лорана имеет главную часть вида $\frac{A}{z-c}$. Непосредственной подстановкой в (3) функции $\frac{A}{z-c}+p_1(z)$, где $p_1(z)$ регулярна в круге $|z|<|c|$, и достаточно малой окрестности точки c, убеждаемся, что $A=\alpha c$. Следовательно,

$$p(z)=\frac{\alpha c}{z-c}+p_1(z). \tag{5}$$

Как будет показано ниже, функция $p(z)$ в круге $|z|<|c|$ обладает свойством $\operatorname{Re} p(z) \geqslant \operatorname{Re} q(z) > \beta \geqslant 0$. Между тем, полагая в равенстве (5) $z=ct$, где $0<t<1$, получаем из него соотношение

$$\operatorname{Re} p(ct)=-\frac{\alpha}{1-t}+\operatorname{Re} p_1(ct).$$

Отсюда видим, что при значениях t, достаточно близких к 1, величина $\operatorname{Re} p(ct)<0$, что невозможно. Таким образом, функция $p(z)$, определяемая формулой (4), голоморфна во всем круге E. Замечаем также, что $p(z) \neq 0$ в E. Полагая $p(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$, $q(z)=a(r,\varphi)+ib(r,\varphi)$, где $z=re^{i\varphi}$, а функция $p(z)$ регулярна в круге $|z|\leqslant r$, получаем из (3) уравнения

$$u+\alpha\frac{u\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}-v\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}}{u^2+v^2}=a, \quad v-\alpha\frac{u\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}+v\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}}{u^2+v^2}=b, \tag{6}$$

где $u \equiv u(r,\varphi)$, $a \equiv a(r,\varphi)$ и т. д.

Пусть $u(r)$ — абсолютный минимум $u(r, \varphi)$ на окружности $|z|=r\in(0, 1)$, а $v(r)$, $b(r)$, $a(r)$ — значение v, b, a в той точке этой окружности, где $u(r, \varphi)=u(r)$. Тогда, учитывая, что $\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi}=r\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial r}=u'(r)$ в точке минимума (при любом значении $r\in(0, 1)$ существует $u'_+(r)$ и $u'_-(r)$; здесь $u'(r)=u'_+(r)$), получаем из (6) уравнения

$$u(r)+\frac{\alpha r u(r)\, u'(r)}{u^2(r)+v^2(r)}=a(r), \tag{7}$$

$$v(r)-\frac{\alpha r v(r)\, u'(r)}{u^2(r)+v^2(r)}=b(r). \tag{8}$$

Поскольку $u'(r)\leqslant 0$ и $a(r)>\lambda\geqslant 0$, где $\lambda=\lim\limits_{r\to 0}\min\limits_{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}\operatorname{Re} q_0(re^{i\theta})$, то из (7) следует, что $u(r)\geqslant a(r)>\lambda$, и из (8) — $v(r)\, b(r)\geqslant 0$.

Таким образом, $u(\rho, \varphi)>\lambda$ в круге $\rho\leqslant r$, что и предполагалось выше при доказательстве голоморфности решения уравнения (3) в E.

Пусть $v(r)\neq 0$; тогда из (8) следует $b(r)\neq 0$. Из (7) и (8) легко получить равенство

$$\frac{a(r)}{u(r)}+\frac{b(r)}{v(r)}=2. \tag{9}$$

Используя это равенство, из (7) получаем

$$\alpha r u'(r)=-u(r)[u(r)-a(r)]\left[1+\frac{b^2(r)}{[2u(r)-a(r)]^2}\right]. \tag{10}$$

Функция $u(r)$, как следует из ее определения, непрерывная, строго убывающая и кусочно-дифференцируемая на $(0, 1)$, а функции $a(r)$ и $b(r)$ могут быть на этом интервале кусочно-непрерывными, но с конечным числом точек разрыва на $(0, 1)$ и при том только 1-го рода. Кроме того, точка $(a(r), b(r))$ принадлежит области D_r и может находиться на границе этой области только тогда, когда $q(z)\equiv q_0(z, \varepsilon)$, $|\varepsilon|=1$. Область D_r — выпуклая при любом $r\in(0, 1)$.

Поскольку абсолютный минимум $u(1)$, когда $q(z)$ пробегает весь класс $Q(D)$, реализуется при некоторой функции этого же класса, то уравнение (10) можно рассматривать как определяющее этот минимум. Если предположить, что точка $(a(r), b(r))$ лежит при некотором $r\in(0, 1)$ на границе своей мажорантной области D_r, то тогда это будет иметь место и при каждом $r\in(0,1)$. Предположим, что этого нет и что каждая такая точка лежит строго внутри своей мажорантной области. Тогда сравним функцию $u(r)$, определяемую уравнением (10), с функцией $u(r)+\delta u(r)$, определяемой этим же уравнением с заменой $a(r)$ на $a(r)+\delta a(r)$, где $|\delta a(r)|$ весьма мало.

Получим уравнение в вариациях

$$\alpha r(\delta u(r))'=-A(r)\,\delta u(r)+B(r)\,\delta a(r),$$

где

$$A(r)=2u(r)-a(r)+\frac{a^2(r)\, b^2(r)}{[2u(r)-a(r)]^2},\quad B(r)=u(r)+\frac{2a(r)\, b^2(r)}{[2u(r)-a(r)]^2}.$$

Отсюда

$$\delta u(r)=\frac{r^{-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\int\limits_0^r B(t)\, t^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\delta a(t)\, e^{-\frac{1}{\alpha}\int\limits_t^r\frac{A(\tau)-1}{\tau}d\tau}\, dt.$$

Если $\delta a(r) < 0$ при $r \in (0, 1)$, то $\delta u(1) < 0$, что невозможно. Поэтому точка $(a(r), b(r))$ должна лежать на границе D_r при любом $r \in (0, 1)$.

Предположим, что

$$\Phi(\xi, \eta, r) = 0, \ r \in (0, 1), \tag{11}$$

— уравнение семейства образов окружностей $|z| = r$ при отображении $w = \xi + i\eta = q_0(re^{i\varphi})$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Через L обозначим ту ортогональную траекторию семейства (11), которая проходит при каждом $r \in (0, 1)$ через ближайшую к мнимой оси точку кривой (11). Линия L определяется системой уравнений

$$\Phi(\xi, \eta, r) = 0,$$

$$\Phi'_\eta(\xi, \eta, r) = 0,$$

где $r \in (0,1)$ играет роль параметра.

Варьируя в уравнении (10) обе функции $a(r)$, $b(r)$ с учетом зависимости $\Phi(a(r), b(r), r) = 0$, нетрудно доказать, решая полученное при этом уравнение в вариациях, что уравнение (10) может определять абсолютный минимум $u(1)$ в классе $M(\alpha, D)$ только тогда, когда точка $(a(r), b(r))$ при каждом значении $r \in (0, 1)$ лежит на кривой L. В частности, если область D симметрична относительно вещественной оси, то линия L совпадает с отрезком $\operatorname{Re} q_0(-1) \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant 1$.

Из сказанного выше следует доказательство теоремы 1 и подтверждение гипотезы Миллера — Мокану — Рида, когда D совпадает с полуплоскостью $\operatorname{Re} w > 0$, так как в этом случае $q_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$. Если же D—полуплоскость $\operatorname{Re} w > \gamma \in (0, 1)$, то $q_0(z) = \dfrac{\frac{1+z}{1-z} + h}{1+h}$, где $h = \frac{\gamma}{1-\gamma}$, и получаем для порядка звездности $\beta(\alpha, \gamma)$ класса $M(\alpha, D)$ формулу:

$$\frac{1}{\beta(\alpha, \gamma)} = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{\frac{1}{\alpha}\int_t^1 \frac{1-q_0(-\tau)}{\tau} d\tau} dt = 2^\mu \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^\mu},$$

где $\mu = \frac{2(1-\gamma)}{\alpha}$.

На других частных случаях мы здесь не останавливаемся.

В статье [2] рассмотрен случай, когда $\alpha = 1$, а также впервые упомянут тот метод доказательства, который применен в данной заметке.

Непосредственным следствием из сказанного выше при доказательстве теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *Порядок звездности* $\beta(\alpha, D)$ *класса* $M(\alpha, D)$ *определяется формулой*

$$\beta(\alpha, D) = \frac{1}{H},$$

где $H = \max\limits_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1} \exp\left[\frac{1}{\alpha}\int_t^1 \frac{1-q_0(\tau e^{i\varphi})}{\tau} d\tau\right] dt\right\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miller S., Mocany P., Reade M. On generalized convexity in conformal mappings. II. — Revue roum Math. pures et appl., 1976, 21, № 2, p. 219—225.
2. Зморович В. А., Коробкова І. К. Про порядок зірчастості опуклих функцій порядку α. — Допов. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 7, с. 584—587.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
10.I. 1977 г.