УДК 519.21

В. С. Королюк, Е. П. Лебединцева

Предельная теорема для времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний

Пусть $\{\xi_k\}_{k=-1}^{\infty}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x) = P\{\xi_k < x\}$ $(\xi_k \geqslant 0)$. Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ определяются соответственно следующими рекуррентными соотношениями:

$$\alpha_n = |\xi_{n-1} - \alpha_{n-1}|,\ n \geqslant 1,\ \alpha_0 = \xi_{-1},\ \beta_n = \min(\xi_n, \alpha_n),\ n \geqslant 0.$$

Ниже показано, что эти последовательности определяют марковский процесс восстановления $\{\alpha_{n+1}, \beta_n, n \geqslant 0\}$ и полумарковский процесс

$$\alpha(t) = \alpha_{\nu(t)},\ \nu(t) = \sup\left\{n : \tau_n = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \leqslant t\right\}.$$

Пусть $\{\eta^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ — семейство независимых в совокупности неотрицательных случайных величин, которые также не зависят от последовательности $\{\xi_k\}_{k=-1}^{\infty}$. Семейство распределений этих величин $G_\varepsilon(t)$ зависит от параметра ε таким образом, что когда $\varepsilon \to 0$, то $G_\varepsilon(t) \to G_0(t)$, где $G_0(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$

Обозначим через $\mu_\varepsilon = \min\{n : \beta_n < \eta_n^\varepsilon\}$ случайную величину, принимающую значения 1, 2, 3, ..., определенную на вероятностном пространстве, порожденном последовательностью $\{\xi_k\}_{k=-1}^{\infty}$ и семейством случайных величин $\{\eta^\varepsilon\}$.

Рассмотрим новый полумарковский процесс $\{\alpha_t^\varepsilon,\ t \geqslant 0\}$ с фазовым пространством $e \cup [0, \infty)$ (e — поглощающее состояние), конструктивно описывающийся следующим образом:

$$\alpha_t^\varepsilon = \begin{cases} \alpha_{\nu(t)}, & 0 \leqslant t < \tau_{\mu_\varepsilon+1}, \\ e, & t \geqslant \tau_{\mu_\varepsilon+1}. \end{cases}$$

Цель данной работы — установить предельную теорему для распределения вероятностей времени пребывания процесса α_t^ε в множестве состояний $[0, \infty)$ до первого перехода в поглощающее состояние.

Лемма 1. 1) *Последовательность $\{\alpha_n, n \geqslant 0\}$ образует однородную цепь Маркова с вероятностями перехода*

$$P\{0 \leqslant \alpha_n < y / \alpha_{n-1} = x\} = F(x+y) - F(\max(0, x-y));$$

2) *последовательность $\{\alpha_{n+1}, \beta_n, n \geqslant 0\}$ — марковский процесс восстановления с вероятностями перехода*

$$P\{0 \leqslant \alpha_{n+1} < y;\ 0 \leqslant \beta_n < z / \alpha_n = x,\ \beta_{n-1} = u\} = Q(x, [0, y), [0, z)) =$$

$$= \begin{cases} F(x+y) - F(\max(0, x-y)), & 0 \leqslant x < z, \\ F(z) - F(\max(0, x-y)), & 0 \leqslant z \leqslant x \leqslant z+y, \\ 0, & 0 \leqslant z+y \leqslant x; \end{cases}$$

3) $\{\alpha(t), t \geqslant 0\}$ — *полумарковский процесс с начальным распределением $P\{0 \leqslant \alpha_0 < t\} = F(t)$ и полумарковским ядром*

$$Q(\alpha_n, \Gamma, [0, t-\tau_n)) = P\{\alpha_{n+1} \in \Gamma, 0 \leqslant \beta_n < t - \tau_n / \alpha_n, \tau_n\}.$$

Лемма доказывается непосредственной проверкой условий марковости и полумарковости для соответствующих процессов.

Время пребывания процесса α_t^ε в множестве $[0, \infty)$ до первого перехода в поглощающее состояние равно случайной величине $\tau^\varepsilon = \beta_0 + \beta_1 + \ldots$ $\ldots + \beta_{\mu_\varepsilon}$, где случайный индекс μ_ε имеет следующее распределение вероятностей:

$$P\{\mu^\varepsilon = 1\} = P\{\beta_1 < \eta_1^\varepsilon\},$$

$$P\{\mu_\varepsilon = k\} = P\{\beta_1 > \eta_1^\varepsilon, \beta_2 \geqslant \eta_2^\varepsilon, \ldots, \beta_{k-1} > \eta_{k-1}^\varepsilon;\ \beta_k < \eta_k^\varepsilon\},\ k = 2, 3, \ldots$$

Поскольку переход в поглощающее состояние из начального состояния для данного процесса невозможен, τ^ε можно рассматривать как сумму $\tau^\varepsilon = \beta_0 + \zeta^\varepsilon$, где β_0 — время пребывания процесса α_t^ε в начальном состоянии, ζ^ε — время пребывания данного процесса в множестве E_0-состояний, из которых возможен переход в поглощающее состояние.

Пусть ζ_x^ε — время пребывания процесса α_t^ε в множестве E_0 до перехода в поглощающее состояние при условии, что из начального состояния процесс перешел в состояние $x \in E_0$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ банахово пространство функций $f(x)$, $x \in E = [0, \infty)$, с нормой $\|f\| = \sup\limits_{0 \leqslant x < \infty} |f(x)|$ и рассмотрим в этом пространстве линейный оператор P, порожденный вероятностями перехода $P(x, \Gamma)$ цепи Маркова $\{\alpha_n, n \geqslant 0\}$, и линейные операторы B_ε, G, D_ε, порожденные соответственно

$$B_\varepsilon(x, \Gamma) = \int_0^\infty [1 - G_\varepsilon(v)]\, Q(x, \Gamma, dv),\ \ G(x, \Gamma) = \int_0^\infty vQ(x, \Gamma, dv),$$

$$D_\varepsilon(x, \Gamma) = \int_0^\infty [1 - G_\varepsilon(v)]\, vQ(x, \Gamma, dv) +$$

$$+ \frac{1}{2}\varepsilon s \int_0^\infty G_\varepsilon(v)\, v^2 e^{-\varepsilon s(\theta v)}\, Q(x, \Gamma, dv),\ \ 0 < \theta < 1.$$

Лемма 2. *Для* $m_x^\varepsilon = M\zeta_x^\varepsilon$ *и* $\varphi_\varepsilon(x, s) = Me^{-s\zeta_x^\varepsilon}$ *имеют место уравнения марковского восстановления*

$$(I - P + B_\varepsilon)\, m_x^\varepsilon = b(x), \tag{1}$$

$$(I - P + B_\varepsilon + \varepsilon sG - \varepsilon sD_\varepsilon)\, \varphi_\varepsilon(x, \varepsilon s) = q_\varepsilon(x, \varepsilon s), \tag{2}$$

где $b(x) = \int_0^x [1 - F(t)]\, dt$, $q_\varepsilon(x, \varepsilon s) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon sv}\, [1 - G_\varepsilon(v)]\, Q(x, E, dv)$.

Для доказательства леммы 2 применяется метод, аналогичный использованному в [1] для вывода уравнений восстановления в случае полумарковских процессов с дискретным фазовым пространством.

Известно, что при выполнении гипотезы Деблина для цепи Маркова с вероятностями перехода $P(x, \Gamma)$ существует стационарное распределение и справедлива равномерная эргодическая теорема: *последовательность операторов* $\Pi_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^{n} P^l$ *сходится в равномерной операторной топологии к пределу* Π *(см.* [2]).

Оператор Π является стационарным проектором данной цепи Маркова. Для цепи Маркова $\{\alpha_n, n \geqslant 0\}$ выполнение гипотезы Деблина обеспечивается условием $\sup\limits_{0 \leqslant x < \infty} F'(x) = \mathbf{M} < \infty$ (см. [3]). Тогда, согласно лемме 1 из [4], оператор $(I - P + \Pi)^{-1}$ существует и ограничен. Из этой леммы вытекает, что оператор

$I - P$ — простой нормально разрешимый оператор и теория возмущенных на спектре операторов может быть применена к операторам, стоящим в левых частях уравнений (1) и (2), если нормы операторов B_ε и $L_\varepsilon = B_\varepsilon + \varepsilon sG - \varepsilon sD_\varepsilon$ достаточно малы (см. [4]).

В результате получим следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть для цепи Маркова* $\{\alpha_n, n \geqslant 0\}$, *вложенной в невозмущенный полумарковский процесс* $\alpha(t)$, *существует единственное стационарное распределение*, $\sup\limits_{0 \leqslant x < \infty} F'(x) = \mathbf{M} < \infty$, $\gamma = \int\limits_0^\infty [1 - F(t)]\, dt < \infty$, $\varepsilon = \int\limits_0^\infty t dG_\varepsilon(t)$. *Тогда* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon m_x^\varepsilon = b$, *где*

$$b = \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^\infty \left\{ [1 - F(x)] \int\limits_0^x [1 - F(t)]\, dt \right\} dx, \tag{3}$$

$$\delta_\varepsilon = \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^\infty [1 - F(x)] \left\{ \int\limits_0^x [1 - G_\varepsilon(u)]\, dF(u) + [1 - G_\varepsilon(x)][1 - F(x)] \right\} dx. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть для цепи Маркова* $\{\alpha_n, n \geqslant 0\}$, *вложенной в невозмущенный полумарковский процесс* $\alpha(t)$, *выполнены условия теоремы* 1 *и* $m_2 = \int\limits_0^\infty t^2 dF(t) < \infty$. *Тогда* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(x, \delta_\varepsilon z) = \frac{1}{1 + bz}$, *где* b *и* δ_ε *определяются формулами* (3) *и* (4).

Учитывая достаточные условия существования единственного стационарного распределения для цепи Маркова $\{\alpha_n, n \geqslant 0\}$ (см. [3]), можно получить из теорем 1 и 2 следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функция* $F(x)$ *имеет непрерывную производную и не имеет интервалов постоянства внутри промежутка, на котором сосредоточено это распределение;* $\int\limits_0^\infty t^2 dF(t) < \infty$; $\sup\limits_{0 \leqslant x < \infty} F'(x) = \mathbf{M} < \infty$; $\int\limits_0^\infty t dG_\varepsilon(t) = \varepsilon$. *Тогда существуют и не зависят от* x *пределы* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon m_x^\varepsilon = b$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(x, \delta_\varepsilon z) = \frac{1}{1 + bz}$, *где*

$$b = \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^\infty \left\{ [1 - F(x)] \int\limits_0^x [1 - F(t)]\, dt \right\} dx,$$

$$\delta_\varepsilon = \frac{1}{\gamma} \int\limits_0^\infty [1 - F(x)] \left\{ \int\limits_0^x [1 - G_\varepsilon(u)]\, dF(u) + [1 - G_\varepsilon(x)][1 - F(x)] \right\} dx.$$

Из этой теоремы в качестве следствия вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функции* $F(x)$ *и* $G_\varepsilon(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 3. *Тогда при любом* $0 \leqslant x_0 < \infty$ *имеют место предельные соотношения*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon M \tau_{x_0}^\varepsilon = b, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} P\{\delta_\varepsilon \tau_{x_0}^\varepsilon > t\} = e^{-\frac{t}{b}},$$

где $\tau_{x_0}^\varepsilon$ — *время пребывания процесса* α_t^ε *в множестве* $[0, \infty)$ *до перехода в поглощающее состояние при начальном состоянии* x_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. К., «Наук. думка», 1976. 180 с.
2. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М., «Мир», 1969. 298 с.
3. Лебединцева Е. П. О предельном распределении длительности безотказной работы резервированной системы с быстрым восстановлением.— В кн.: Теория случайных процессов. Вопросы статистики и управления. К., Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 85—104.
4. Korolyuk V. S., Turbin A. F. Asymptotic Enlarging of Semi—Markov Processes with an arbitrary State Space. Proceedings of the Third Japan—USSR Symposium on Probability Theory. Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1976, p. 297—315.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
6.VI. 1978 г.