УДК 519.21

Б. Пирджанов

Случайное блуждание, порожденное двумя процессами восстановления

Пусть заданы две последовательности независимых одинаково распределенных в каждой последовательности решетчатых случайных величин: $\{\theta_n,\ n \geqslant 1\}$ с распределением вероятностей

$$p_k = P\{\theta_n = k\},\ k \geqslant 0,\ n \geqslant 1,\quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1; \tag{1}$$

и $\{\varkappa_n,\ n \geqslant 1\}$ с распределением вероятностей

$$q_k = P\{\varkappa_n = k\},\ k \geqslant 1,\ n \geqslant 1,\quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1. \tag{2}$$

Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \ n \geqslant 0, \ S_0 = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_k, \ n \geqslant 0, \ \sigma_0 = 0. \tag{4}$$

Производящие функции обозначим соответственно через

$$p(z) = Mz^{\theta_n} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k, \tag{5}$$

$$q(z) = Mz^{\varkappa_n} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k q_k. \tag{6}$$

Построим процесс восстановления

$$\nu_n = \max\{k : \sigma_k \leqslant n\} \tag{7}$$

и определим случайное блуждание

$$\xi_n = \nu_n - S_n, \ n \geqslant 0 \tag{8}$$

Последовательность $\{\xi_n, n \geqslant 0\}$ имеет разнообразную интерпретацию в теории массового обслуживания, хранения запасов, задачах о разорении. Например, ν_n можно интерпретировать как поступление, а S_n — расход запасов.

Введем цепь Маркова

$$\eta_n = n - \sigma_{\nu_n}, \quad n \geqslant 0, \tag{9}$$

описывающую величину недоскока через уровень n в процессе восстановления $\{\sigma_n, n \geqslant 0\}$. Двумерная последовательность $\{\eta_n, \xi_n, n \geqslant 0\}$ образует цепь Маркова, однородную по второй компоненте [1].

Рассмотрим следующие функционалы от процесса $\{\eta_n, \xi_n + k, n \geqslant 0\}$:

$$\tau_k = \inf\{n : k + \xi_n \leqslant 0\}, \quad T_k = -\xi_{\tau_k} - k, \tag{10}$$

при начальном условии: $\eta_0 = 0$, $\xi_0 = 0$. Величина τ_k — момент достижения второй компонентой нулевого уровня, а T_k — величина перескока второй компонентой нулевого уровня.

Введем вспомогательные функционалы от процесса восстановления $\{S_n, n \geqslant 0\}$:

$$\tau_k^* = \inf\{n : S_n \geqslant k\}, \quad T_k^* = S_{\tau_k^*} - k. \tag{11}$$

Здесь τ_k^* — момент перескока уровня k, T_k^* — величина перескока уровня k процессом восстановления $\{S_n, n \geqslant 0\}$.

Введем обозначения: $\bar{a}_r(u) = \sum_{m=1}^{\infty} u^m q_m P\{S_m = r\}$, $r \geqslant 0$, $\varphi_1(u, v) = M[u^{\tau_1} v^{T_1}]$, $e_k(u, v) = b_k(u, v) + c_k(u, v) + \varphi_1(u, v) d_k(u)$, $b_k(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u^m v^n P\{\tau_k^* = m, \ T_k^* = n\} P\{\varkappa > m\}$, $c_k(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u^m v^{n-1} P \times \{\tau_k^* = m, \ T_k^* = n\} P\{\varkappa = m\}$, $d_k(u) = \sum_{m=1}^{\infty} u^m P\{\tau_k^* = m, \ T_k^* = 0\} \times P\{\varkappa = m\}$, $\tilde{e}_k(u, v) = e_k(u, v) - q(u) a_k(u) \varphi_1(u, v)$.

Теорема 1. *Производящие функции* $\varphi_k(u, v) = M[u^{\tau_k} v^{T_k}]$, $\varphi_k(u, 1) = Mu^{\tau_k}$, $\varphi_k(1, v) = Mv^{T_k}$ *удовлетворяют следующим уравнениям:*

$$\varphi_k(u, v) - q(u) \sum_{r=0}^{k-1} a_r(u) \varphi_{k-r+1}(\varphi, v) = e_k(u, v), \tag{12}$$

$$\varphi_k(u, 1) - q(u) \sum_{r=0}^{k-1} a_r(u) \varphi_{k-r+1}(u, 1) = e_k(u, 1), \tag{13}$$

$$\varphi_k(1, v) - \sum_{r=0}^{k-1} a_r \varphi_{k-r+1}(1, v) = e_k(1, v). \tag{14}$$

Доказательство теоремы 1 основывается на следующих леммах.

Лемма 1. *Для производящей функции* $\psi_k(u, v) = M[u^{\tau_k} v^{T_k^*}]$ *имеет место выражение*

$$\psi(u, v, z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \psi_k(u, v) = \frac{uz}{1 - up(z)} \frac{p(v) - p(z)}{v - z}. \tag{15}$$

Лемма 2. *Для случайных величин* τ_k *и* T_k *имеют место следующие стохастические соотношения:*

$$\tau_k = \tau_k^* J(\tau_k^* < \varkappa) + (\varkappa + \tau_{k-s_\varkappa+1}) J(\tau_k^* > \varkappa), \ k > 0; \quad \tau_k = 0, \ k \leqslant 0, \tag{16}$$

$$T_k = T_k^* J(\tau_k^* < \varkappa) + T_{k-s_\varkappa+1} J(\tau_k^* > \varkappa) + (T_k^* - 1) J(\tau_k^* = \varkappa, \ T_k^* > 0) + \\ + T_1 J(\tau_k^* = \varkappa, \ T_k^* = 0), \quad k > 0. \tag{17}$$

Вычислим производящую функцию последовательности $\bar{a}_r(u)$:

$$\bar{a}(u, z) = \sum_{r=1}^{\infty} z^r \bar{a}_r(u) = \sum_{m=1}^{\infty} u^m q_m \sum_{r=1}^{\infty} z^r P\{S_m = r\} = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} u^m q_m p^m(z) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m (up(z))^m = q(up(z))$$

или

$$\bar{a}(u, z) = q(up(z)). \tag{18}$$

Тогда функцию

$$a(u, z) = \frac{q(up(z))}{q(u)} \tag{19}$$

с $a(u, 1) = 1$ можно интерпретировать как производящую функцию полунепрерывной решетчатой случайной величины ρ_n с вероятностью:

$$P\{\rho_n = r - 1\} = a_r(u) = \bar{a}_r(u)/q(u), \quad r \geqslant 0. \tag{20}$$

Лемма 3. *Для производящей функции* $e(u, v, z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k e_k(u, v)$ *справедливо соотношение:*

$$e(u, v, z) = \frac{z}{p(z)} \left\{ \frac{p(v) - p(z)}{v - z} \left[\frac{up(z) - q(up(z))}{1 - up(z)} + \frac{q(up(z))}{v} \right] + \\ + \frac{p_0 - p(z)}{z} \left[\frac{1}{v} - \frac{e(u, v, \alpha)}{\alpha} \right] q(up(z)) \right\}, \tag{21}$$

где $\alpha = \alpha(u)$ — *корень уравнения*

$$\alpha(u) = q(up(\alpha(u))). \tag{22}$$

Из леммы 3 при $z = \alpha = \alpha(u)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 1.

$$e(u, v, \alpha) = \frac{\alpha}{p_0}\left\{\frac{p(v)-p(\alpha)}{v-\alpha}\left[\frac{up(\alpha)-\alpha}{1-up(\alpha)} + \frac{\alpha}{v}\right] + \frac{p_0 - p(\alpha)}{v}\right\}, \tag{23}$$

$$e(u, 1, \alpha) = \frac{\alpha}{p_0}\left\{\frac{1-p(\alpha)}{1-\alpha}\left[\frac{up(\alpha)-\alpha}{1-up(\alpha)} + \alpha\right] + p_0 - p(\alpha)\right\}, \tag{24}$$

$$e(v) = \frac{1}{p_0}\left\{\frac{1-p(v)}{1-v}\left[\frac{1-M\theta}{M\theta} + \frac{1}{v}\right] + \frac{p_0-1}{v}\right\}. \tag{25}$$

Здесь $e(v) = e(1, v, 1) = \lim\limits_{\alpha\to 1} e(1, v, \alpha)$. Производящая функция последовательности $\tilde{e}_k(u, v)$ будет

$$\tilde{e}(u, v, z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \tilde{e}_k(u, v) = e(u, v, z) - [q(up(z)) - q(up_0)]\frac{e(u, v, \alpha)}{\alpha}. \tag{26}$$

Отсюда при $z = \alpha$ получим

$$\tilde{e}(u, v, \alpha) = \frac{q(up_0)}{\alpha} e(u, v, \alpha). \tag{27}$$

Для решения уравнений (12)—(14) используем метод потенциала [2, 3].

Пусть $\mathbf{R}_k(Q)$ — резольвента полунепрерывного решетчатого случайного блуждания с производящей функцией $a(u, z) = q(up(z))/zq(u)$, $\mathbf{R}_k$ — потенциал полунепрерывного решетчатого случайного блуждания с производящей функцией $a(1, z) = q(p(z))/z$. Производящая функция $r_Q(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z^k \mathbf{R}_k(Q)$ определяется соотношением

$$r_Q(z) = \frac{1}{k(z) - Q}, \tag{28}$$

в котором

$$k(z) = \frac{a(u, z)}{z} - 1 \text{ и } Q = \frac{1}{q(u)} - 1. \tag{29}$$

Итак,

$$r_Q(z) = \frac{zq(u)}{q(up(z)) - z}. \tag{30}$$

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 2. *Для производящих функций* $\varphi_k(u, v) = M[u^{\tau_k} v^{T_k}]$, $\varphi_k(u, 1) = Mu^{\tau_k}$ *и* $\varphi_k(1, v) = Mv^{T_k}$ *справедливы следующие соотношения*

$$M[u^{\tau_k} v^{T_k}] = \frac{q(up_0)}{\alpha q(u)} e(u, v, \alpha)\mathbf{R}_k(Q) - \frac{1}{q(u)}\sum_{r=1}^{k}\mathbf{R}_{k-r}(Q)\tilde{e}_r(u, v), \qquad k \geqslant 1, \tag{31}$$

$$Mu^{\tau_k} = \frac{q(up_0)}{\alpha q(u)} e(u, 1, \alpha)\mathbf{R}_k(Q) - \frac{1}{q(u)}\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{R}_{k-r}(Q)\tilde{e}_r(u, 1), \tag{32}$$

$$Mv^{T_k}=\frac{q(p_0)}{p_0}\left\{\frac{1-p(v)}{1-v}\left[\frac{1-M\theta}{M\theta}+\frac{1}{v}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{p_0-1}{v}\right\}\mathbf{R}_k-\sum_{r=1}^{k}\mathbf{R}_{k-r}\tilde{e}_r(1,v). \tag{33}$$

В частности, для $\varphi_1(u, v)=M[u^{\tau_1}v^{T_1}]$, $\varphi_1(u, 1)=Mu^{\tau_1}$ и $\varphi_1(1, v)=Mv^{T_1}$ имеют место формулы

$$M[u^{\tau_1}v^{T_1}]=\frac{e(u, v, \alpha)}{\alpha}, \tag{34}$$

$$Mu^{\tau_1}=\frac{e(u, 1, \alpha)}{\alpha}, \tag{35}$$

$$Mv^{T_1}=\frac{1}{p_0}\left\{\frac{1-p(v)}{1-v}\left[\frac{1-M\theta}{M\theta}+\frac{1}{v}\right]+\frac{p_0-1}{v}\right\}. \tag{36}$$

Для доказательства теоремы 2 уравнение (12) преобразуется к стандартному виду

$$\sum_{r=0}^{k}a_r(u)\varphi_{k-r+1}(u, v)-\varphi_k(u, v)-Q\varphi_k(u, v)=-\frac{1}{q(u)}\tilde{e}_k(u, v), \qquad k>0, \tag{37}$$

при условии

$$\varphi_k(u, v)=0, \quad k\leqslant 0, \tag{38}$$

Решение задачи (49)—(50), выраженное через резольвенту $\mathbf{R}_k(Q)$, имеет вид (см. [3]):

$$\varphi_k(u, v)=c(Q, v)R_k(Q)-\frac{1}{q(u)}\sum_{r=1}^{k}\mathbf{R}_{k-r}(Q)\tilde{e}_r(u, v), \qquad k\geqslant 1. \tag{39}$$

Для определения константы $c(Q, v)$ в (39) перейдем к производящим функциям по $k\geqslant 1$. Тогда получим

$$\varphi(u, v, z)=c(Q, v)r_Q(z)-\frac{1}{q(u)}r_Q(z)\tilde{e}(u, v, z),$$

или, иначе,

$$\varphi(u, v, z)=\frac{zq(u)}{q(up(z))-z}\left[c(Q, v)-\frac{\tilde{e}(u, v, z)}{q(u)}\right]. \tag{40}$$

В последнем полагаем $z=\alpha$. Учитывая (22) и (27), находим

$$c(Q, v)=\frac{q(up_0)}{\alpha q(u)}e(u, v, \alpha). \tag{41}$$

Подставляя (41) и (26) в (40), получаем

$$\varphi(u, v, z)=\frac{z}{q(up(z))-z}\left[\frac{e(u, v, \alpha)}{\alpha}q(up(z))-e(u, v, z)\right]. \tag{42}$$

Из (42) при $v=1$ находим

$$\varphi(u, 1, z)=\frac{z}{q(up(z))-z}\left[\frac{e(u, 1, \alpha)}{\alpha}q(up(z))-e(u, 1, z)\right]. \tag{43}$$

Полагая в (42) $u=1$ и учитывая, что $\alpha=\alpha(1)=1$, и (25), получаем

$$\varphi(1, v, z)=\frac{z}{q(p(z))-z}\left\{\frac{1-p(v)}{1-v}\left[\frac{1-M\theta}{M\theta}+\frac{1}{v}\right]\frac{q(p(z))}{p_0}+\right.$$
$$\left.+\frac{p_0-1}{p_0 v}-e(1, v, z)\right\}. \tag{44}$$

Теперь из формулы (39) нетрудно получить утверждения (31)—(36).

В качестве следствия теоремы 2 можно получить следующий предельный результат для величины перескока:

$$\lim_{k\to\infty} M\left[v^{T_k}, \tau_k<\infty\right]=\frac{1}{M\theta}\frac{1-p(v)}{1-v}. \tag{45}$$

Заметим, что предельное выражение совпадает с производящей функцией предельной величины перескока для процесса восстановления $\{S_n, n\geqslant 0\}$.

В заключение автор выражает благодарность И. И. Ежову за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ежов И. И. Цепи Маркова, однородные по второй компоненте, и их применение к задаче о времени первого выхода за данный уровень.— Тр. шестой математической школы по теории вероятностей и математической статистике, К., Ин-т математики АН УССР, 1968, с. 295—312.
2. Королюк В. С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. К., «Наук. думка», 1975. 138 с.
3. Братийчук Н. С., Пирджанов Б. Потенциал и резольвента решетчатого случайного блуждания.— УМЖ, 1977, **29**, № 6, с. 786—790.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., «Мир», 1967. 752 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
7.IV. 1978 г.