УДК 519. 217

И. Ш. Ибрамхалилов

О статистике для корреляционной функции процесса, получаемого из винеровского с помощью специального преобразования

Рассмотрим случайный процесс

$$x(t) = w(t) + \int_0^t f(t, s)\, dw(s), \quad t \in [0, \infty), \tag{1}$$

где $w(\cdot)$ — винеровский процесс, а $f(t, s)$ непрерывна по $t, s \in [0, \infty)$. Очевидно, что $\mathbf{M}\, x(t) = 0$ и при $u < t$

$$R_f(t, u) = \mathbf{M}\, x(t)\, x(u) = \mathbf{M} \left\{ \int_0^t [1 + f(t, s)]\, dw(s) \oplus \int_0^u [1 + f(u, v)]\, dw(v) \right\} =$$

$$= \int_0^u [1 + f(t, s)][1 + f(u, s)]\, ds = u + \int_0^u f(t, s)\, ds + \int_0^u f(u, s)\, ds +$$

$$+ \int_0^u f(t, s) f(u, s)\, ds.$$

Нас будут интересовать условия существования состоятельной оценки для корреляционной функции R_f по одному наблюдению случайного процесса $x(t)$, $t \in [0, \infty)$. Под такой оценкой будем понимать функцию $R_T^*(s, t, x)$, зависящую от наблюдаемой траектории процесса $x(\cdot)$ на промежутке $[0, T]$ и сходящуюся по вероятности при $T \to \infty$ к истинному значению корреляционной функции $R_f(s, t)$ в некоторой метрике.

Множество допустимых значений функции $f(t, s)$, входящей в формулу (1), обозначим через F. Относительно F будем предполагать выполненным ряд условий, вводимых по ходу рассмотрения.

1) Для всех $f \in F$ существуют непрерывные частные производные $f'_t(t, s)$ и $f'_s(t, s)$, кроме того, $f(t, t) = 0$.

Условие 1) позволяет переписать формулу (1) с помощью интегриро вания по частям в виде

$$x(t) = w(t) + \int_0^t f'_s(t, s)\, w(s)\, ds. \tag{2}$$

Используя эту формулу и известные результаты об абсолютной непрерывности гауссовских мер, можно утверждать, что на любом промежутке $[0, T]$ мера, соответствующая процессу $x(t)$, абсолютно непрерывна относительно меры, соответствующей винеровскому процессу Хотя плотность одной меры относительно другой легко вычисляется, однако применить аналог метода максимального правдоподобия (вместо подпространств X_n [1, 2] здесь естественно рассматривать бесконечномерные пространства $L_2[0, T]$) неудобно по следующим соображениям. Во-первых, придется рассматривать обращения интегрального оператора, во-вторых, в плотность будет входить сама функция $f(t, s)$, а не R_f, в то же время, между ними нет взаимно однозначного соответствия.

Поэтому будем рассматривать метод, аналогичный примененному в [1]. Роль меры с корреляционным оператором A_1 (см. [2]) будет играть винеровская мера с корреляционной функцией $\min(t, u)$. Как уже отмечалось в [3], под $A_1^{-\frac{1}{2}}$ естественно понимать оператор дифференцирования. Поэтому роль оператора $D = A_1^{-\frac{1}{2}} A A_1^{-\frac{1}{2}} - E$, рассматриваемого в [1], будет играть оператор с ядром

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial u}[R_f(t, u) - \min(t, u)] = D(t, u). \tag{3}$$

Учитывая выражение для $R_f(t, u)$, получаем

$$D(t, u) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f(t, u) + \displaystyle\int_0^u \dfrac{\partial}{\partial t} f(t, s) \dfrac{\partial}{\partial u} f(u, s)\, ds \quad (u < t), \\ \dfrac{\partial}{\partial u} f(t, u) + \displaystyle\int_0^t \dfrac{\partial}{\partial t} f(t, s) \dfrac{\partial}{\partial u} f(u, s)\, ds \quad (t < u). \end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что $D(t, u) = D(u, t)$. Оператор D на любую функцию $g(t)$ действует следующим образом:

$$Dg(t) = \int_0^\infty D(t, u)\, g(u)\, du.$$

Рассмотрим функционал вида

$$U_T(x, D) = \int_0^T \int_0^T D(t, u)\, \gamma(t)\, \gamma(u)\, dx(t)\, dx(u) -$$

$$-\int_0^T D(t, t)\, \gamma^2(t)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T D^2(t, u)\, \gamma(t)\, \gamma(u)\, dt du, \tag{5}$$

где $\gamma(t)$ — некоторая положительная дифференцируемая функция, для которой $\gamma(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Интеграл, кратный в (5) по $dx(\cdot)$, не является кратным интегралом Ито, поскольку не центрирован, сумма двух первых членов даст интеграл Ито, если $x(t)$ — винеровский процесс.

На функцию $\gamma(t)$ наложим некоторые ограничения. Обозначим через G множество всех функций $D(t, u)$, получаемых по формуле (4), если $f \in F$. Тогда при любых D, $D_0 \in G$ выполняются условия:

а) $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty [D(t, u) - D_0(t, u)]^2\, \gamma^2(t)\, \gamma^2(u)\, dt du < \infty$;

б) при $T \to \infty$

$$\int_0^T \int_0^T [D(t, u) - D_0(t, u)]^2\, \gamma(t)\, \gamma(u)\, dt du \to +\infty.$$

Рассмотрим оценку для $D(t, u)$, получаемую как точку, максимизирующую квадратический функционал (5).

Для каждого значения $D(t, s) \in G$, $t, s \in [0, T]$ функционал (5) определен почти для всех $x(\cdot)$ по мере μ, каково бы ни было $D(t, s) \in G$. Для того, чтобы при каждом $x(\cdot)$ функционал (5) был определен сразу для всех $D(t, s) \in G$, будем предполагать, что:

2) существуют производные $D'_t(t, s)$, $D'_s(t, s)$, $D''_{t,s}(t, s)$, при всех $T > 0$ принадлежащие некоторому компактному множеству в $L_2([0, T]\times[0, T])$. (Это ограничение на F.)

Стохастический интеграл в (5) (учитывая, что $x(0)=0$), можно написать в виде обычного интеграла следующим образом:

$$\int_0^T\int_0^T D(t, u)\gamma(t)\gamma(u)\,dx(t)\,dx(u) = \gamma^2(T)D(T, T)x^2(T) - \\ -\gamma(T)x(T)\eta_T^{(1)}(x, D) + \eta_T^{(2)}(x, D), \qquad (6)$$

где

$$\eta_T^{(1)}(x, D) = \int_0^T [D(T, u)\gamma(u)]'_u x(u)\,du + \int_0^T [D(t, T)\gamma(t)]'_t x(t)\,dt,$$

$$\eta_T^{(2)}(x, D) = \int_0^T\int_0^T [D'_t(t, u)\gamma(u)]'_u \gamma(t)x(t)\,dtdu + \int_0^T\int_0^T [D(t, u)\gamma(u)]'_u \times \\ \times \gamma'(t)x(t)x(u)\,dtdu.$$

Учитывая (6), убеждаемся, что существует функция $D_T(t, s, x) = D^*_T(t, s)$ такая, для которой функционал $U_T(x, D)$ принимает максимальное значение при $D(t, s) = D^*_T(t, s)$.

Обозначим через $f_0(t, s)$ такое значение функции $f(t, s)$, при котором функция $D(t, s)$, определенная соотношением (4), принимает свое неизвестное истинное значение $D_0(t, s)$. Тогда

$$D_0(t, u) = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} f_0(t, u) + \displaystyle\int_0^u \dfrac{\partial}{\partial u} f_0(t, s)\dfrac{\partial}{\partial u} f_0(u, s)\,ds & (u < t), \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u} f_0(t, u) + \displaystyle\int_0^t \dfrac{\partial}{\partial u} f_0(u, s)\dfrac{\partial}{\partial t} f_0(t, s)\,ds & (t < u). \end{cases}$$

Положим $D(t, u) = D_0(t, u) + \omega(t, u)$. Тогда функционал (5) можно преобразовать следующим образом:

$$U_T(x, D) = \int_0^T\int_0^T \omega(t, u)\gamma(t)\gamma(u)\,dx(t)\,dx(u) + \\ + \int_0^T\int_0^T D_0(t, u)\gamma(t)\gamma(u)\,dx(t)\,dx(u) - \int_0^T \omega(t, t)\gamma^2(t)\,dt - \int_0^T D_0(t, t)\gamma^2(t)\,dt - \\ - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T \omega^2(t, u)\gamma(t)\gamma(u)\,dtdu - \int_0^T\int_0^T \omega(t, u)D_0(t, u)\gamma(t)\gamma(u)\,dtdu - \\ - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T D_0^2(t, u)\gamma(t)\gamma(u)\,dtdu. \qquad (7)$$

Пусть

$$\Phi_T(x, \omega) = \int_0^T\int_0^T \omega(t, u)\gamma(t)\gamma(u)\,dx(t)\,dx(u) - \int_0^T \omega(t, t)\gamma^2(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T \omega^2(t,\ u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dt\,du-\int_0^T\int_0^T \omega(t,\ u)\,D_0(t,\ u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dt\,du. \quad (8)$$

Если ω_T^*—точка максимума функционала (8), то $\omega_T^* = D_T^* - D_0$, где D_T^*—точка максимума функционала (7).

Так как

$$dx(t)=\left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_0(t,\ s)\,dw(s)\right]dt+dw(t),$$

то можно написать

$$dx(t)\,dx(u)=\left[\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_0(t,\ s)\,dw(s)\right)dt+dw(t)\right]\times$$

$$\times\left[\left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} f_0(u,v)\,dw(v)\right)dv+dw(u)\right]=dw(t)\,dw(u)+$$

$$+dw(t)\,du\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} f_0(u,\ v)\,dw(v)+dw(u)\,dt\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_0(t,\ s)\,dw(s)+$$

$$dt\,du\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_0(t,\ s)\,dw(s)\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} f_0(u,\ v)\,dw(v). \quad (9)$$

Функционал (8) с учетом (9) можно записать в виде

$$\Phi_T(x,\ \omega)=\eta_T(x,\ \omega)-\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T \omega^2(t,\ u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dt\,du, \quad (10)$$

где

$$\eta_T(x,\ \omega)=\int_0^T\int_0^T \omega(t,\ u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dw(t)\,dw(u)+\int_0^T\int_0^T \omega(t,\ u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dw(t)\,du\ \times$$

$$\times\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} f_0(u,\ v)\,dw(v)+\int_0^T\int_0^T \omega(t,\ u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dw(u)\,dt\ \times$$

$$\times\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_0(t,\ s)\,dw(s)+\int_0^T\int_0^T \omega(t,\ u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dt\,du\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_0(t,\ s)\,dw(s)\times$$

$$\times\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} f_0(u,\ v)\,dw(v)-\int_0^T \omega(t,\ t)\,\gamma^2(t)\,dt-\int_0^T\int_0^T \omega(t,\ u)\,D_0(t,\ u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dt\,du. \quad (11)$$

Заметим, что для первых четырех слагаемых выражения (11) соответственно имеет место

$$M\left[\int_0^T\int_0^T \omega(t,\ u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dw(t)\,dw(u)\right]=\int_0^T \omega(t,\ t)\,\gamma^2(t)\,dt, \quad (12)$$

$$M\left[\int_0^T\int_0^T \omega(t,u)\gamma(t)\gamma(u)\,dw(t)\,du\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} f_0(u,v)\,dw(v)\right]=$$

$$=\int_0^T\int_0^u \omega(t,u)\frac{\partial}{\partial u} f_0(u,t)\gamma(t)\gamma(u)\,dtdu, \tag{13}$$

$$M\left[\int_0^T\int_0^T \omega(t,u)\gamma(t)\gamma(u)\,dw(u)\,dt\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_0(t,s)\,dw(s)\right]=$$

$$=\int_0^T\int_0^t \omega(t,s)\frac{\partial}{\partial t} f_0(t,s)\gamma(t)\gamma(s)\,dtds, \tag{14}$$

$$M\left[\int_0^T\int_0^T \omega(t,u)\gamma(t)\gamma(u)\,dudt\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f_0(t,s)\,dw(s)\int_0^u \frac{\partial}{\partial u} f_0(u,v)\,dw(v)\right]=$$

$$=\int_0^T\int_0^T \omega(t,u)\gamma(t)\gamma(u)\int_0^{\min(u,t)} \frac{\partial}{\partial t} f_0(t,s)\frac{\partial}{\partial u} f_0(u,s)\,dtdsdu=$$

$$=\int_0^T\int_0^T\int_0^u \omega(t,u)\frac{\partial}{\partial t} f_0(t,s)\frac{\partial}{\partial u} f_0(u,s)\gamma(t)\gamma(u)\,dtdsdu+$$

$$+\int_0^T\int_0^T\int_0^t \omega(t,u)\frac{\partial}{\partial t} f_0(t,s)\frac{\partial}{\partial u} f_0(u,s)\gamma(t)\gamma(u)\,dtduds. \tag{15}$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что

$$\eta_T(x,\omega)=\int_0^T\int_0^T L_T[\omega(t,u)\gamma(t)\gamma(u)]\,dw(t)\,dw(u)-$$

$$-M\left[\int_0^T\int_0^T L_T[\omega(t,u)\gamma(t)\gamma(u)]\,dw(t)\,dw(u)\right], \tag{16}$$

где

$$L_T[K(t,u)]=K(t,u)+\int_t^T \frac{\partial}{\partial s} f_0(s,t)K(s,u)\,ds+\int_u^T \frac{\partial}{\partial s} f_0(s,u)K(s,t)\,ds+$$

$$+\int_t^T\int_u^T \frac{\partial}{\partial s} f_0(s,t)\frac{\partial}{\partial v} f_0(v,u)K(s,v)\,dsdv.$$

Обозначим через $\widetilde{G}$ множество функций вида $D_1(t,u)-D_2(t\ u)$, где D_1, $D_2\in G$. Введем в линейной оболочке $\widetilde{G}$ норму

$$\|\omega\|=\sqrt{\int_0^\infty\int_0^\infty \omega^2(t,u)\gamma^2(t)\gamma^2(u)\,dtdu}\,. \tag{17}$$

Будем предполагать выполненными условия:

3) существует постоянная G_T, зависящая только от T, такая, для которой

$$\int_0^T\int_0^T (L_T[K(t, u)])^2\,dtdu \leqslant C_T\int_0^T\int_0^T K^2(t, u)\,dtdu$$

и при $T\to\infty$ для любого $\varepsilon>0$ равномерно при $\|\omega\|\geqslant\varepsilon$, $\omega\in\widetilde{G}$,

$$\frac{1}{\sqrt{C_T}}\int_0^T\int_0^T \omega^2(t, u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dtdu\to+\infty;$$

4) пусть X_G — гильбертово пространство функций $\omega(t, u)$ с нормой (17).

Тогда в X_G существует такой оператор S, для которого $\operatorname{Sp} S^{\beta}<\infty$ при некотором $\beta<\frac{2}{3}$ и

$$\widetilde{G}\subset\{\omega:\|S^{-1}\omega\|\leqslant 1\}.$$

Далее, функционал (17) запишем в виде

$$\Phi_T(x, \omega)=\sqrt{C_T}\left[\zeta_T(x, \omega)-\frac{1}{2\sqrt{C_T}}\int_0^T\int_0^T\omega^2(t, u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dtdu\right], \quad (18)$$

где $\zeta_T(x, \omega)=\frac{1}{\sqrt{C_T}}\eta_T(x, \omega)$. Очевидно, что при $\omega=0$ $\Phi_T(x, 0)=0$ и $M\zeta_T(x, \omega)=0$. Покажем, что по мере μ

$$-\sup\left[\zeta_T(x, \omega)-\frac{1}{2\sqrt{C_T}}\int_0^T\int_0^T\omega^2(t, u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dtdu\right]\to+\infty$$

при $T\to\infty$ равномерно при $\|\omega\|\geqslant\varepsilon$.

Для этого достаточно показать, что функция $\zeta_T(x, \omega)$ равномерна относительно T, ограничена по $D\in G$. Это утверждение вытекает из следствия 2 теоремы работы [4].

Действительно, учитывая условие 3), можно написать:

$$M\,|\zeta_T(x, \omega_1)-\zeta_T(x, \omega^2)|^2=\frac{1}{C_T}M\left\{\int_0^T\int_0^T L_T\{[\omega_1(t, u)-\omega_2(t, u)]\,\gamma(t)\,\gamma(u)\}\times\right.$$

$$\left.\times\,dw(t)\,dw(u)-M\left[\int_0^T\int_0^T \underline{L}_T\{[\omega_1(t, u)-\omega_2(t, u)]\,\gamma(t)\,\gamma(u)\}\,dw(t)\,dw(u)\right]\right\}^2=$$

$$=\frac{2}{C_T}\int_0^T\int_0^T\{L_T[(\omega_1(t, u)-\omega_2(t, u))\,\gamma(t)\,\gamma(u)]\}^2\,dtdu\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\infty\int_0^\infty[\omega_1(t, u)-\omega_2(t, u)]^2\,\gamma^2(t)\,\gamma^2(u)\,dtdu=2\,\|\omega_1-\omega_2\|^2.$$

Из этого и из условий 3), 4) следует, что при $T\to\infty$

$$\zeta_T(x, \omega)-\frac{1}{2\sqrt{C_T}}\int_0^T\int_0^T\omega^2(t, u)\,\gamma(t)\,\gamma(u)\,dtdu\to-\infty$$

равномерно при $\|\omega\|\geqslant\varepsilon$.

Поэтому

$$\mu(\{x : \| D_T^*(x) - D_0 \| > \varepsilon\}) \leqslant \mu(\{x : \inf_{\|\omega\| > \varepsilon} \Phi_T(x, \omega) \leqslant 0\}) \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \mu(\{x : \inf_{\|\omega\| > \varepsilon} \Phi_T(x, \omega) > 0\}).$$

Из этого следует, что

$$\lim_{T \to \infty} \mu(\{x : \| D_T^* - D_0 \| > \varepsilon\}) = 0.$$

Тогда из (3) вытекает, что состоятельной оценкой корреляционной функции $R_0(t, u)$ будет

$$R_T^*(t, u, x) = \int_0^t \int_0^u D_T^*(t, u, x)\, dt du + \min(t, u). \tag{19}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполняются условия* 1)—4), *то для* $R_0(t, u)$ *существует состоятельная оценка* $R_T^*(t, u, x)$, *определяемая формулой* (19), *где* $D_T^*(t, u, x)$ — *точка максимума функционала* (5). *При этом*

$$\int_0^T \int_0^T \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} [R_{f_0}(t, s, x) - R_T^*(t, s, x)]^2 dt ds\right]$$

ходится к нулю по вероятности, каково бы ни было истинное значение $R_{f_0}(t, s)$ *корреляционной функции процесса* (1).

Замечание. Условие 4) необходимо лишь для доказательства (относительно T) равномерной ограниченности $\zeta_T(x, \omega)$ по ω. В частности, если множество $\widetilde{G}$ можно изометрично вложить в компакт конечномерного подпространства, то это условие излишне. Это можно использовать для построения оценок параметров корреляционной функции процесса вида (1), если функция f гладко зависит от конечного числа параметров.

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Скороходу за консультации и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрамхалилов И. Ш. О существовании состоятельных оценок для корреляционного оператора гауссовского распределения.— В кн.: Вопросы статистики и управления случайными процессами, К., Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 106—115.
2. Ибрамхалилов И. Ш. О байесовских оценках корреляционного оператора гауссовых величин в гильбертовом пространстве.— В кн.: Вопросы статистики и управления случайными процессами, К., Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 116—125.
3. Ибрамхалилов И. Ш., Скороход А. В. Определение среднего для винеровского процесса, наблюдаемого на бесконечном интервале.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, 18, вып. 4, с. 804—808.
4. Скороход А. В. Теорема о непрерывности случайной функции на компакте в гильбертовом пространстве.— Теория вероятностей и ее применения, 1973, 18, вып. 4, с. 809—811.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
7.VII. 1977 г.