УДК 519.217

Р. В. Бойко

Об одной предельной теореме для ветвящихся процессов с иммиграцией с переменным режимом (критический случай)

Пусть $\xi(t)$ — процесс, описывающий эволюцию количества частиц в популяции, размножающихся следующим образом. Если в момент t в популяции существует k частиц, то за малый промежуток времени Δt каждая частица независимо от своего происхождения и возраста и независимо от судьбы других частиц с вероятностью $\pi_m(k)\Delta t + o(\Delta t)$ превращается в m частиц и не претерпевает изменения с вероятностью $1+\pi_1(k)\Delta t + o(\Delta t)$.

Кроме того, имеется приток частиц извне, управляемый случайным механизмом. За малый промежуток времени Δt, если в момент t в популяции существует k частиц с вероятностью $\delta_m^0 + \omega_m(k)\Delta t + o(\Delta t)$ (δ_m^0 — символ Кронекера), возникают m частиц, которые в дальнейшем размножаются по описанной выше схеме.

Предполагается, что $\pi_1(k) < 0$, $\pi_m(k) \geqslant 0$, $m \neq 1$, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \pi_m(k) = 0$. Кроме того, будем считать, что количество частиц в популяции не оказывает влияния на размножение и иммиграцию. если размер популяции превышает некоторый фиксированный уровень N. Это значит, что $\pi_m(k) = \mu_m$, $\omega_m(k) = \varepsilon_m$ при $k > N$. Описанную модель ветвящегося процесса с иммиграцией назовем ветвящимся процессом с иммиграцией с переменным режимом.

Подобные модели ветвящихся процессов с дискретным временем, в которых иммиграция зависит от состояния, изучались в работах [1—4].

В этих работах рассматривалась модель ветвящегося процесса с дискретным временем, в которой иммиграция происходит лишь в те моменты времени, когда число частиц не превосходит некоторое фиксированное число N, при этом режим размножения иммигрировавших и существовавших частиц не зависит от размера популяции.

Введем производящие функции

$$\varphi_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m(k) z^m, \quad \psi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m z^m, \quad w_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m(k) z^m,$$

$$v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m z^m.$$

По аналогии с обычными ветвящимися процессами с иммиграцией процесс $\xi(t)$ назовем критическим (критический случай), если $\psi'(1) = 0$.

Переходные вероятности процесса $\xi(t)$ обозначим через $P_{ij}(t)$: $P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}$, а производящие функции переходных вероятностей через $F_i(t, z): F_i(t, z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) z^k$. В [5] показано, что $F_0(t, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_0(t,z)}{\partial t}=\psi(z)\frac{\partial F_0(t,z)}{\partial z}+v(z)F_0(t,z)+\sum_{k=0}^{N}P_{0k}(t)(kz^{k-1}(\varphi_k(z)-$$

$$-\psi(z))+z^k(w_k(z)-v(z))), \tag{1}$$

с начальным условием $F_0(0,z)=1$. В дальнейшем будем считать что $\xi(0)=0$.

Теорема 1. *Если* $\psi'(1)=0$, $0<\psi''(1)<\infty$, $0<v'(1)<\infty$, $\varphi_m'(1)<\infty$, $0<w_m'(1)<\infty$, $m=1,2,\ldots,N$, *то при* $t\to\infty$

$$R_t(x)=P\left\{\frac{2\xi(t)}{\psi''(1)t}\leqslant x\right\}\to R(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{2v'(1)}{\psi''(1)}\right)}\displaystyle\int_0^x u^{\frac{2v'(1)}{\psi''(1)}-1}e^{-u}du, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что преобразование Лапласа $F_0\left(t,\exp\left\{-\frac{2s}{\psi''(1)t}\right\}\right)$ случайной величины $\frac{2\xi(t)}{\psi''(1)t}$ при $t\to\infty$ сходится к преобразованию Лапласа распределения $R(x)$, равному $(1+s)^{-\frac{2v'(1)}{\psi''(1)}}$.

Нетрудно проверить, что решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $F_0(0,z)=1$, может быть записано следующим образом:

$$F_0(t,z)=F(t,z)-I_t(z)=F(t,z)-\int_0^t F(t-y,z)\sum_{k=0}^{N}P_{0k}(y)(k\Phi^{k-1}(t-y,z)\times$$

$$\times(\varphi_k(\Phi(t-y,z))-\psi(\Phi(t-y,z)))+\Phi^k(t-y,z)(w_k(\Phi(t-y,z))-$$

$$-v(\Phi(t-y,z))))\,dy, \tag{2}$$

где $F(t,z)$, $\Phi(t,z)$ — решения уравнений

$$\frac{\partial F(t,z)}{\partial t}=\psi(z)\frac{\partial F(t,z)}{\partial z}+v(z)F(t,z),\quad \frac{\partial\Phi(t,z)}{\partial t}=\psi(z)\frac{\partial\Phi(t,z)}{\partial z}$$

с начальными условиями $F(0,z)=1$, $\Phi(0,z)=z$. Заметим, что $F(t,z)$ — производящая функция переходных вероятностей обычного ветвящегося процесса с иммиграцией с производящей функцией интенсивностей размножения $\psi(z)$ и иммиграции $v(z)$, а $\Phi(t,z)=P_{10}\left(0,t+\int_0^z\frac{du}{\psi(u)}\right)$, где $P_{10}(0,t)=$ $=P\{\nu(t)=0\mid\nu(0)=1\}$, $\nu(t)$ — обычный ветвящийся процесс с производящей функцией интенсивностей размножения $\psi(z)$. Поэтому (см. [6], гл. VII, § 4)

$$\lim_{t\to\infty}F\left(t,\exp\left\{-\frac{2s}{\psi''(1)t}\right\}\right)=(1+s)^{-\frac{2v'(1)}{\psi''(1)}},$$

и для завершения доказательства теоремы остается показать, что интеграл $I_t(z)$, входящий в формулу (2), при $z=\exp\left\{-\frac{2s}{\psi''(1)t}\right\}$ стремится к нулю, когда $t\to\infty$.

Для преобразований Лапласа $\tilde{P}_{ij}(s)$ переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ процесса $\xi(t)$ в [5] получены формулы, которые можно записать в виде

$$\tilde{P}_{0j}(s)=\tilde{P}^{\text{II}}_{0j}(s)+\frac{\tilde{P}^{\text{II}}_{Nj}(s)\, f_0(s)}{\tilde{q}_{N0}(s)-f_N(s)}\,, \tag{3}$$

при $i\leqslant N,\ j\leqslant N$, где

$$f_r(s)=s\sum_{k=N+1}^{\infty}\tilde{P}^{\text{II}}_{rk}(s)\,\tilde{q}_{k0}(s)=\sum_{m=1}^{N}m\tilde{P}^{\text{II}}_{rm}(s)\sum_{k=N+1}^{\infty}\pi_{k+1-m}(m)\,\tilde{q}_{k0}(s)+$$
$$+\sum_{m=0}^{N}\tilde{P}^{\text{II}}_{rm}(s)\sum_{k=N+1}^{\infty}\omega_{k-m}(m)\,\tilde{q}_{k0}(s),\ \ r=0,\ N;$$

$$\tilde{q}_{k0}(s)=\int\limits_0^{\infty}e^{-st}\Phi_1^k(t,\,0)\exp\left\{\int\limits_0^t v\,(\Phi\,(u,\,0))\,du\right\}dt,$$

$\tilde{P}^{\text{II}}_{rm}(s)=-\dfrac{A_{rm}(s)}{A(s)}$, $A_{rm}(s)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{r+1,m+1}$ определителя $A(s)$:

$$A(s)=\begin{vmatrix}\omega_0(0)-s & \pi_0(1) & 0 & \dots & 0\\ \omega_1(0) & \pi_1(1)-s+\omega_0(1) & 2\pi_0(2) & & \\ \omega_2(0) & \pi_2(1)+\omega_1(1) & 2\pi_1(2)-s+\omega_0(2) & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & N\pi_0(N)\\ \omega_N(0) & \dots & & & N\pi_1(N)-s+\omega_0(N)\end{vmatrix}.$$

Так как $\tilde{q}_{k0}(s)\leqslant\int\limits_0^{\infty}e^{-st}\exp\left\{\int\limits_0^t v\,(\Phi\,(u,\,0))\,du\right\}dt=\tilde{F}(s,\,0)$, то

$$f_r(s)\leqslant\tilde{F}(s,\,0)\,s\sum_{k=N+1}^{\infty}\tilde{P}^{\text{II}}_{rk}(s)=\tilde{F}(s,\,0)\left(1-s\sum_{k=0}^{N}\tilde{P}^{\text{II}}_{rk}(s)\right). \tag{4}$$

Известно (см. [6], гл. II, § 2), что $P_{10}(0,\,t)=1-\frac{2}{\psi''(1)\,t}+o\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t\to\infty$, значит $v\,(P_{10}(0,\,u))=\frac{2v'(1)}{\psi''(1)\,u}+o\left(\frac{1}{u}\right)$ при $u\to\infty$. Поэтому

$$\int\limits_0^t v\,(P_{10}(0,u))\,du=\frac{-2v'(1)}{\psi''(1)}\ln t+o\,(\ln t)<-\frac{v'(1)}{\psi''(1)}\ln t,$$

и, следовательно,

$$\lim_{s\to 0}s\tilde{F}(s,\,0)=\lim_{t\to\infty}F\,(t,\,0)=0. \tag{5}$$

Из (3) получаем, что

$$\tilde{q}_{N0}(s)-f_N(s)=\tilde{q}_{N0}(s)-s\tilde{q}_{N0}(s)\sum_{k=N+1}^{\infty}\tilde{P}^{\text{II}}_{Nk}(s)-s\sum_{k=N+1}^{\infty}\tilde{P}^{\text{II}}_{Nk}(s)\,(\tilde{q}_{k0}(s)-$$
$$-\tilde{q}_{N0}(s))=s\tilde{q}_{N0}(s)\sum_{k=0}^{N}\tilde{P}^{\text{II}}_{Nk}(s)-\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{N}m\pi_{k+1-m}(m)\,\tilde{P}^{\text{II}}_{Nm}(s)+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{N}\omega_{k-m}(m)\,\tilde{P}^{\text{II}}_{Nm}(s)\right)(\tilde{q}_{k0}(s)-\tilde{q}_{N0}(s)).$$

Поэтому

$$\lim_{s\to 0} \tilde{q}_{N0}(s) - f_N(s) \neq 0 \tag{6}$$

Из соотношений (5), (6) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} P_{0k}(t) = \lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{0k}(s) = 0, \ k = 0, 1, \dots, N. \tag{7}$$

Так как $|F(t, z)| \leqslant 1$, $|\Phi(t, z)| \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1$, то

$$I_t(z) \leqslant \sum_{k=0}^{N} \left(\int_0^{\sqrt{t}} P_{0k}(y) r(t-y, z)\, dy + \int_{\sqrt{t}}^{t} P_{0k}(y) r_k(t-y, z)\, dy \right), \tag{8}$$

где $r_k(t, z) = k\varphi_k(\Phi(t, z)) + \psi(\Phi(t, z)) + |w_k(\Phi(t, z))| + |v(\Phi(t, z))|$.

Считая дальше $z = \exp\left\{-\frac{2s}{\psi''(1)\, t}\right\}$, учитывая, что $P_{10}(0, u) = 1 - \frac{2}{\psi''(1)\, u} + o\left(\frac{1}{u}\right)$ при $u \to \infty$ и используя лемму 1 работы [7], нетрудно получить следующую оценку: $r_k(t, z) \leqslant \frac{c_1}{t}$ при $t \to \infty$, c_1 — некоторая константа. Тогда при $t \to \infty$ $\int_0^{\sqrt{t}} P_{0k}(y) r_k(t-y, z)\, dy \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{t}}$, а $\int_{\sqrt{t}}^{t} P_{0k}(y) \times r(t-y, z)\, dy \leqslant c_1 \max_{\sqrt{t} \leqslant Y \leqslant t} P_{0k}(y) \to 0$ в силу (7). Поэтому $I_t(z) \to 0$ при $t \to \infty$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pakes A. G. A branching process with state dependent immigration component.—Adv. Appl. Probab., 1971, 3, N 2, p. 301—304.
2. Foster James H. A limit theorem for a branching process with state — dependent immigration.— Ann. Math. Stat., 1971, **42**, N 5, p. 1773—1776.
3. Nakagawa Tetsuo, Sato Masamichi, A G—W proc. with state — dependent immigration.— Res. Repts. Nagaoka Techn. Coll., 1974, **9**, N 4, p. 177—182.
4. Sato Hasamichi. A note on invariant measures for the G—W process with state — dependent immigration.— Sci Repts Nugata Univ., 1975, N 2, p. 43—45.
5. Бойко Р. В. Об одном управляемом ветвящемся процессе.— УМЖ, 1974, **26**, № 2, с. 235—240.
6. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М., «Наука», 1971. 436 с.
7. Бойко Р. В. Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных процессов с переменным режимом (критический случай).— УМЖ, 1977, **29**, N 1, с. 85—91.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
15.X. 1977 г.