УДК 519.21

А. М. Захарин

Эргодическая теорема для односложных рандомизированных полумарковских процессов

Введенный в [1] односложный полумарковский процесс обобщает обычный полумарковский процесс на случай зависимости будущей эволюции от времени пребывания в предшествующем состоянии.

Определение 1. Пусть $\xi(t) \in N_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — непрерывный справа случайный процесс; $\varkappa_n$ — момент n-го перехода $\xi(t)$;

$$\nu(t) = \max\{n : \varkappa_n \leqslant t\}; \qquad \zeta(t) = \varkappa_{\nu(t)} - \varkappa_{\nu(t)-1};$$

$$Y(t) = (\xi(t), \quad \zeta(t)) = Y_{\nu(t)}; \qquad Y_n = Y(\varkappa_n) = (\xi_n, \zeta_n);$$
$$\eta(t) = t - \varkappa_{\nu(t)}; \qquad X(t) = (\xi(t), \zeta(t), \eta(t)).$$

Процесс $\xi(t)$ назовем *односложным полумарковским*, если он однозначно определяется заданием матрицы $f(x \mid y) = (f_{ij}(x \mid y); \, i, j \in N_+)$ переходных вероятностей $f_{ij}(x \mid y) = P\{\xi_n = j, \, \zeta_n < x \mid Y_{n-1} = (i, y)\}$ и начальным распределением процесса $X(t)$. *Однородный марковский процесс* $X(t)$ *назовем односложным линейчатым* (см. [1]).

Определение 2. *Односложный полумарковский процесс* $\xi(t)$ назовем *рандомизированным*, если

$$f_{ij}(x \mid y) = \sum_{\alpha \in a} c_i^\alpha(y) f_{ij}^\alpha(x), \tag{1}$$

$$c_i^\alpha(y) \geqslant 0, \quad \sum_{\alpha \in a} c_i^\alpha(y) \equiv 1, \tag{2}$$

$$f_i^\alpha(x) \equiv \sum_j f_{ij}^\alpha(x), \quad f_i^\alpha(\infty) \equiv 1. \tag{3}$$

Используя соотношения (2), (3), а в случае бесконечного множества a еще и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [2], по аналогии с [3] нетрудно убедиться, что совокупность чисел

$$Q_{km}^{\alpha\beta} = \int_0^\infty c_m^\beta(y) \, f_{km}^\alpha(dy) \geqslant 0 \tag{4}$$

образует стохастическую матрицу Q. Соответствующая однородная дискретная цепь Маркова $Y_n^* = Y(\varkappa_n) = (\xi_n, \pi_n)$ вкладывается в обычный полумарковский процесс $Y^*(t) = (\xi(t), \pi(t))$, который задается переходными вероятностями

$$P\{Y_n^* = (m, \beta), \zeta_n < x / Y_{n-1}^* = (k, \alpha)\} = Q_{km}^{\alpha\beta}(x) = \int_0^x c_m^\beta(y) \, f_{km}^\alpha(dy)$$
$$(Q_{km}^{\alpha\beta}(\infty) = Q_{km}^{\alpha\beta}). \tag{5}$$

Вероятностный смысл процесса $\pi(t)$ выясняется при следующем подходе к заданию рандомизированного полумарковского процесса.

Будем считать, что в каждый момент перехода $\varkappa_n$ производится выбор значения $\pi_n = \pi(\varkappa_n)$ параметра рандомизации $\pi(t)$ в соответствии с распределением (2), т. е. согласно формуле

$$P\{\pi_n = \beta \mid Y_{n-1} = (i, \alpha)\} = \sum_m \int_0^\infty c_m^\beta(y) \, df_{im}^\alpha(y).$$

Таким образом, процесс $\pi(t)$ по определению в момент t дает выбранное значение параметра рандомизации на отрезке $[\varkappa_{\nu(t)}, \varkappa_{\nu(t)+1})$. Как нетрудно убедиться, процесс $X^*(t) = (\xi(t), \pi(t), \eta(t))$ — линейчатый однородный марковский, сопровождающий обычный дискретный полумарковский процесс $Y^*(t)$ со всеми вытекающими отсюда следствиями.

Подчеркнем, что описанная схема представляет собой второй способ марковизации рандомизированного полумарковского процесса любого порядка сложности $r \geqslant 1$ (см. [2]). Однако такой переход от сложного рандомизированного полумарковского процесса к обычному двумерному дискретному процессу $Y^*(t)$ не решает полностью проблему исследования сложных рандомизированных полумарковских процессов, поскольку марковские процессы $X(t)$ и $X^*(t)$ несут различную дополнительную информацию о поведении сложного рандомизированного полумарковского процесса, а для некоторых задач существенна именно информация, содержащаяся в процессе $X(t)$ и не содержащаяся в процессе $X^*(t)$. В таких случаях возникает необходимость исследовать именно первую марковскую модель, т. е. процесс $X(t)$.

По аналогии с [3] нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема. *Если марковская цепь* $Y_n^{\bullet}$ *с матрицей переходных вероятностей* Q *эргодична и* $\{q_k^{\alpha}; \alpha \in a; k \in N_+\}$ — *ее стационарное распределение, то стационарное распределение вложенной цепи Маркова* Y_n $p_m(y) = \lim_{n \to \infty} P\{\xi_n = m, \zeta_n < y\}$ *определяется соотношением*

$$p_m(y) = \sum_{k,\alpha} q_k^{\alpha} f_{km}^{\alpha}(y), \tag{6}$$

а стационарное распределение процесса $X(t)$ $p_m(y, x) = \lim_{t \to \infty} \{\xi(t) = m, \zeta(t) < y, \eta(t) < x\}$ *имеет следующий вид:*

$$p_m(y, x) = \int_0^y \sum_{k,\alpha} c_k^{\alpha}(u)\, p_k(du)\, f_{km}^{\alpha}(x). \tag{7}$$

Следствие. *В предположении дифференцируемости функций* $f_{ij}^{\alpha}(x)$ *дифференцирование соотношений* (6), (7) *дает плотности стационарных распределений вложенной марковской цепи* Y_n *и процесса* $X(t)$

$$\frac{d}{dy} p_m(y) = \sum_{k,\alpha} q_k^{\alpha} \frac{d}{dy} f_{km}^{\alpha}(y),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} p_m(y, x) = \sum_{k,\alpha} c_k^{\alpha}(y) \frac{d}{dy} p_k(y) \frac{d}{dx} f_{km}^{\alpha}(x).$$

В заключение автор выражает благодарность И. И. Ежову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ежов И. И., Захарин А. М. Время пребывания сложного рандомизированного полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 4, с. 345—347.
2. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965. 656 с.
3. Захарин А. М. Сложные рекуррентные рандомизированные потоки. — Докл. АН УССР. Сер. А. 1977, № 10, с. 940—942.

Институт кибернетики
АН УССР

Поступила в редакцию
18.VIII. 1977 г.