УДК 517.52

А. П. Кохановский

Тауберова теорема для одного класса $(J; p_n)$-методов суммирования

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ с положительными членами расходится и удовлетворяет условию

$$\frac{p(x^2)}{p(x)} \to 1 \quad (x \to 1-0), \tag{1}$$

где $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$.

Последовательность s_n $(n=0; 1; \ldots)$ называется суммируемой $(L; p_n)$-методом к числу s, если

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = s. \tag{2}$$

Когда же

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k = s, \tag{3}$$

где $P_n = p_0 + \ldots + p_n$, то s_n называется $(l; p_n)$-суммируемой к числу s.

Если $p_n = \dfrac{1}{n+1}$ $(n=0; 1; \ldots)$, то $(L; p_n)$- и $(l; p_n)$-методы — соответственно полунепрерывный и дискретный логарифмические методы суммирования.

Легко убедиться, что из (3) всегда следует (2), но обратное не всегда верно.

Укажем достаточное условие для того, чтобы из (2) следовало (3).

Пусть μ — произвольное фиксированное положительное число.

Теорема. *Если последовательность s_n суммируется к числу s методом (L, p_n) и удовлетворяет условию*

$$s_n > -\mu \frac{P_n}{(n+1) p_n} \quad (n=0; 1; \ldots), \tag{4}$$

то s_n суммируется к s и $(l; p_n)$-методом.

Следствие. *Если последовательность s_n суммируется к числу s полунепрерывным логарифмическим методом и удовлетворяет условию $s_n > -\mu \ln(n+1)$ $(n=0; 1; \ldots)$, то s_n суммируется к s и дискретным логарифмическим методом.*

Это следствие точное, т. е. $\ln (n+1)$ нельзя заменить на более быстро возрастающую последовательность [1].

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть последовательность s_n $(n=0; 1; \ldots)$ удовлетворяет условию* (4).

Если $\dfrac{1}{p(x)} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = O(1)$, *то* $\sigma_n = \dfrac{1}{P_n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k s_k = O(1)$.

Доказательство. Положим

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{e}; \\ \dfrac{1}{x}, \text{ если } \dfrac{1}{e} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{e}{e-1} x - \frac{1}{e-1} \leqslant g(x) \leqslant -ex + (1+e). \tag{5}$$

Воспользовавшись неравенствами (5) и условием (4), оценим сверху выражение $W(x) = \dfrac{1}{p(x)} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n g(x^n)$.

$$W(x) = \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ p_n \left(s_n + \mu \frac{P_n}{(n+1) p_n} \right) x^n g(x^n) - \mu \frac{P_n}{n+1} x^n g(x^n) \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(p_n s_n + \mu \frac{P_n}{n+1} \right) (-e x^n + 1 + e) x^n - \right.$$

$$\left. - \mu \frac{P_n}{n+1} \left(\frac{e}{e-1} x^n - \frac{1}{e-1} \right) x^n \right\} = -e \frac{p(x^2)}{p(x)} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^{2n}}{p(x^2)} +$$

$$+ (1+e) \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n}{p(x)} + \mu \frac{e^2}{e-1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n+1} x^{2n}}{p(x)} <$$

$$< N_1 + \mu \frac{e^2}{e-1} \frac{1-x}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n < N.$$

Здесь и далее N_1, N, M — некоторые постоянные положительные числа.

Выражение $W(x)$ оценим снизу аналогично:

$$W(x) \geqslant \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(p_n s_n + \mu \frac{P_n}{n+1} \right) \left(\frac{e}{e-1} x^{2n} - \frac{1}{e-1} x^n \right) - \right.$$

$$\left. - \mu \frac{P_n}{n+1} (-e x^{2n} + (1+e) x^n) \right\} = \frac{e}{e-1} \frac{p(x^2)}{p(x)} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^{2n}}{p(x^2)} -$$

$$- \frac{1}{e-1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n}{p(x)} - \mu \frac{e^2}{e-1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n+1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{n+1} x^{2n}}{p(x)} > -M.$$

Из полученных оценок имеем

$$\frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n g(x^n) = O(1). \tag{6}$$

Выберем $x_N = e^{-\frac{1}{N}}$, где N — натуральное число. Тогда

$$g(x_N^n) = \begin{cases} 0, & \text{при } n > N, \\ \frac{1}{x_N^n}, & \text{при } n \leqslant N. \end{cases} \tag{7}$$

Подставив в соотношение (6) вместо x число x_N, получим

$$\frac{1}{p(x_N)} \sum_{k=0}^{N} p_k s_k = O(1). \tag{8}$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n g(x^n) \sim p(x) \quad (x \to 1-0). \tag{9}$$

Действительно,

$$\overline{\lim_{x\to 1-0}} \frac{\omega(x)}{p(x)} \leqslant \overline{\lim_{x\to 1-0}} \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n(-ex^n + 1 + e) = 1$$

и

$$\underline{\lim_{x\to 1-0}} \frac{\omega(x)}{p(x)} \geqslant \underline{\lim_{x\to 1-0}} \frac{1}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \left(\frac{e}{e-1} x^n \frac{1}{e-1}\right) = 1.$$

Поэтому, $p(x_N) \sim P_N$ $(N \to \infty)$, что следует из (9) при $x = x_N$. Отсюда и из (8) вытекает справедливость леммы.

Лемма 2. *Если* $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{1}{p(x)} \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n = s$ *и последовательность* $\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum\limits_{k=0}^{n} p_k s_k$ *для всех* $n = 0; 1; \ldots$ *удовлетворяет условию* $\sigma_n > -M$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} P_k \sigma_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} P_k} = s. \tag{10}$$

Эту лемму докажем методом Карамата [2], с. 258. Не умаляя общности, можем считать последовательность σ_n неотрицательной. Известно (см. [2], с. 258), что для функции $g(x)$ всегда можно построить многочлены $t(x)$ и $T(x)$, удовлетворяющие при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ условиям

$$t(x) \leqslant g(x) \leqslant T(x), \qquad \int_0^1 [g(x) - t(x)]\,dx < \varepsilon, \qquad \int_0^1 [T(x) - g(x)]\,dx < \varepsilon. \tag{11}$$

Покажем, что для всякого многочлена $v(x)$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sigma_n x^n v(x^n) = s \int_0^1 v(x)\,dx. \tag{12}$$

Для этого достаточно рассмотреть случай, когда $v(x) = x^k$. Заметим, что из условия $p(x) \sim p(x^2)$ следует $p(x) \sim p(x^k)$ при любом натуральном k. Имеем

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sigma_n x^{(k+1)n} = \lim_{x\to 1-0} \left\{ \frac{1-x}{p(x)} \frac{p(x^{k+1})}{1-x^{k+1}} \frac{1-x^{k+1}}{p(x^{k+1})} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sigma_n x^{(k+1)n} \right\} = \lim_{x\to 1-0} \frac{p(x^{k+1})}{p(x)} \lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{1-x^{k+1}} \times$$

$$\times \lim_{x\to 1-0} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^{(k+1)n}}{p(x^{k+1})} = s \frac{1}{k+1} = s \int_0^1 x^k dx.$$

Покажем, что соотношение (12) имеет место и для функции $g(x)$. Для этого воспользуемся неравенствами (11) и тем замечанием, что $\sigma_n \geqslant 0$ ($n = 0; 1; \ldots$).

Действительно,

$$\overline{\lim_{x\to 1-0}} \frac{1-x}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sigma_n x^n g(x^n) \leqslant \overline{\lim_{x\to 1-0}} \frac{1-x}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sigma_n x^n T(x^n) < s(1+\varepsilon)$$

и

$$\underline{\lim_{x\to 1-0}} \frac{1-x}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sigma_n x^n g(x^n) > s(1-\varepsilon).$$

Устремляя в полученных неравенствах число ε к нулю, получаем

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{1-x}{p(x)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sigma_n x^n g(x^n) = s.$$

Положим в этом равенстве $x = x_N$. Тогда на основании (7) получим $\lim_{N\to\infty} \frac{1-x_N}{p(x_N)} \sum_{k=0}^{N} P_k \sigma_k = s$. Так как $\frac{1-x_N}{p(x_N)} \sim \left(\sum_{k=0}^{N} P_k\right)^{-1}$, то имеет место равенство (10). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $s_n > -\mu \frac{P_n}{(n+1)\,p_n}$ ($n = 0; 1; \ldots$). *Если последовательность* $\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k$ *ограничена, то она будет медленно убывающей.*

Доказательство. Пусть $m > n$, тогда

$$\sigma_m - \sigma_n = -\frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k \left(\frac{P_m - P_n}{P_m}\right) + \frac{1}{P_m} \sum_{k=n+1}^{m} p_k s_k \geqslant$$

$$\geqslant M \frac{P_m - P_n}{P_m} - \mu\left(\frac{m-n}{n}\right). \tag{13}$$

Согласно условию $p(x) \sim p(x^2)$ имеем $P_{2n} \sim p(x_{2n}) \sim p(x_{2n}^2) = p(x_n) \sim P_n$, т. е. $P_n \sim P_{2n}$ $(n \to \infty)$. Поэтому, если $1 < \frac{m}{n} \to 1$ $(n \to \infty)$, то $n > \frac{m}{2}$ для всех достаточно больших n и

$$1 > \frac{P_n}{P_m} > \frac{P_{\left[\frac{m}{2}\right]}}{P_m} \to 1 \quad (m \to \infty).$$

Итак, если $1 > \frac{m}{n} \to 1$ $(n \to \infty)$, то из (13) следует $\underline{\lim}(\sigma_m - \sigma_n) \geqslant 0$. Лемма 3 доказана.

Если $\lim_{n\to\infty} s_n = s(L; p_n)$, то согласно лемме 1 последовательность σ_n будет ограниченной, а согласно лемме 2 — будет суммироваться к числу s $(\bar{R}; P_n)$-методом [3], с. 79, т. е. будет выполняться равенство (10). По теореме 14 из [3] имеем, что $(\bar{R}; P_n)$-метод равносилен методу средних арифметических. Справедливость сформулированной теоремы следует из леммы 3 и теоремы 68 монографии [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кохановский А. П. Условие равносильности логарифмических методов суммирования.— УМЖ, 1975, **27, № 2,** с. 229—234.
2. Титчмарш Е. Теория функций. М.—Л., Гостехиздат, 1951. 506 с.
3. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.

Уманский
педагогический институт

Поступила в редакцию
10.V. 1977 г.