УДК 518.61

И. Н. Любченко

Об одном итерационном методе решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $C_0^n[0, T]$ — псевдонормированное пространство n-мерных векторов с компонентами из $C_0[0, T]$. Псевдонорму будем обозначать $\|\cdot\|$. Постоянную a отождествляем с вектором $\{a\}$.

Рассмотрим задачу Коши для системы n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

Здесь $x = x(t) \in C_0^n[0, T]$; функция f, осуществляющая отображение пространства $C_0^n[0, T]$ в себя, имеет ограниченную производную Фреше в некоторой области $G \subset C_0^n[0, T]$ (содержащей решение задачи (1) x) и удовлетворяет условию

$$f(\xi_1(t)) - f(\xi_2(t)) - f'(\xi_2(t))(\xi_1(t) - \xi_2(t)) = o(\xi_1(t) - \xi_2(t))\,(\xi_1, \xi_2 \in G;$$
$$\|f'(\xi_2)\| \leqslant M; \quad \|o(\alpha)\| \leqslant C\|\alpha\|^2). \tag{2}$$

Докажем, что для функции

$$\varphi(\xi) = \xi(t) + \int_0^t e^{\int_\tau^t f'(\xi(\alpha))d\alpha} (f(\xi(\tau)) - \dot{\xi}(\tau))\,d\tau, \tag{3}$$

осуществляющей отображение $G \subset C_0^n[0, T]$ в $C_0^n[0, T]$, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Итерационный процесс*

$$x^{(k)}(t) = \varphi(x^{(k-1)}(t)) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

сходится к решению задачи Коши (1) *при следующих условиях:*

а) $x^{(0)} \in C_0^n[0, T], \quad x^{(0)}(0) = x_0$;

б) $f(\xi)$ *удовлетворяет условию* (2) *в области* G, *являющейся выпуклой оболочкой элементов* $x, x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$;

в) $D = 2\sup\limits_{t,\tau}\left\| f'(\xi(t))\int_\tau^t f'(\xi(\alpha))\,d\alpha - \int_\tau^t f'(\xi(\alpha))\,d\alpha f'(\xi(t))\right\| < T^{-1}e^{-MT}$;

г) $\|x - x^{(0)}\| < C^{-1}(e^{-MT}T^{-1} - D)$.

Для доказательства прежде всего отметим, что условию а) вместе с $x^{(0)}$ удовлетворяют также функции $x^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Далее, так как решение задачи Коши (1) x — неподвижная точка отображения φ, осталось доказать, что φ — сжатое отображение.

Оценим $\varphi(\xi) - \varphi(x)$ при $\xi \in G$:

$$\varphi(\xi(t) - \varphi(x(t)) = \xi(t) - x(t) + \int_0^t e^{\int_\tau^t f'(\xi(\alpha))d\alpha} (f(\xi(\tau)) - \dot{\xi}(\tau))\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \Bigg[\Bigg(\frac{d}{d\tau} e^{\int_\tau^t f'(\xi(\alpha))d\alpha} + e^{\int_\tau^t f'(\xi(\alpha))d\alpha} f'(\xi(\tau))\Bigg)(\xi(\tau) - x(\tau)) +$$

$$+ e^{\int_\tau^t f'(\xi(\alpha))d\alpha} o(\xi(\tau) - x(\tau))\Bigg]\, d\tau,$$

$$\|\varphi(\xi) - \varphi(x)\| \leqslant T(e^{MT} D\|\xi - x\| + e^{MT} C\|\xi - x\|^2) \leqslant \lambda\|\xi - x\| \quad (\lambda < 1) \tag{5}$$

(здесь нормы операторов $(e^A)' - e^A A'$ и e^A для простоты завышены).

Таким образом, итерационный процесс (4) сходится к решению задачи Коши (1).

Отметим, что в случае коммутативности операторов $f'(\xi(\tau))$ и $\int_\tau^t f'(\xi(\alpha))\, d\alpha$ (что будет, в частности, при $n = 1$) итерационный процесс (4) сходящийся второго порядка (по терминологии, принятой в [1]) с оценкой погрешности $\|x^{(k)} - x\| \leqslant \lambda^{-1}(\lambda\|x^{(0)} - x\|)^{2^k}$ (здесь $\lambda = Te^{MT}C$).

В частном случае линейной системы, т. е. в случае $C = 0$, погрешность метода имеет вид

$$\|x^{(k)} - x\| \leqslant \frac{(TD)^k}{1 - TD}\|x^{(0)} - x^{(1)}\|.$$

Отметим, что упрощенный итерационный процесс для функции

$$\varphi(\xi) = \xi(t) + \int_0^t e^{(t-\tau)f'(x_0)}(f(\xi(\tau) - \dot{\xi}(\tau))\, d\tau$$

также сходящийся. Этот метод получен и успешно применен пошагово, на каждом из интервалов $(t_i, t_i + h)$, с начальным приближением $x_i^{(0)} \equiv x_i(t_i)$ в работе [2] для решения задачи Коши (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. Т. 1, М., «Наука», 1975. 631 с.
2. Ракитский Ю. В. Новые численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений.— Тр. Ленинградск. политехн. ин-та, 1973, № 332 (вып. 3), с. 88—97.

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
13.VII. 1977 г.