УДК 519.21

М. Н. Марушин

Об одной сходимости к закону Пуассона для сумм независимых случайных величин

Рассматривается сумма $S_{nk}=\sum_{i=1}^{k} x_{ni}$ предельно пренебрегаемых независимых случайных величин x_{ni}, где $k=k_n$ — неубывающая последовательность целых положительных чисел, стремящаяся к ∞. Напомним, что случайные величины x_{ni} $(i=1,\ldots,k)$ называются предельно пренебрегаемыми, если существует такая положительная монотонно убывающая последовательность $\{\varepsilon_{nk},\ n=1,2,\ldots\}$, стремящаяся к 0, для которой

$$M_{nk}=\max_{1\leqslant i\leqslant k} P(|x_{ni}|\geqslant \varepsilon_{nk})\to 0,\quad n\to\infty. \tag{1}$$

Обычно задачи о предельных распределениях связаны с нахождением условий слабой сходимости распределений надлежащим образом нормированных сумм S_{nk} при $n\to\infty$. В данной работе изучается более сильная сходимость распределений сумм S_{nk} к закону Пуассона. Идеи этой сходимости сформулированы в работе [1].

Пусть

$$\varepsilon_{nk}k_n\leqslant \tau_{nk}<1-\varepsilon_{nk}k_n\ (\varepsilon_{nk}\geqslant 0),\qquad \lambda_{nk}=\sum_{i=1}^{k}\int_{|x-1|<\varepsilon_{nk}} dF_{ni}(x), \tag{2}$$

где $F_{ni}(x)=P(x_{ni}<x)$. Обозначим $P_{nk}^{(m)}=P(|S_{nk}-m|<\tau_{nk})$, $\Pi_{nk}^{(m)}=\frac{\lambda_{nk}^m}{m!}e^{-\lambda_{nk}}$. В качестве меры расхождения между распределением вероятностей $P_{nk}^{(m)}$ и совокупностью аппроксимирующих выражений $\Pi_{nk}^{(m)}$ можно взять величину $H_{nk}=\sum_{m=0}^{\infty}|P_{nk}^{(m)}-\Pi_{nk}^{(m)}|$. Естественность и удобство введенной величины подтверждаются тем, что если η_{nk} целочисленная величина с распределением $\Pi_{nk}^{(m)}$, то при $\tau_{nk}>\frac{1}{2}$

$$\sup_A|P(S_{nk}\in A)-P(\eta_{nk}\in A)|\leqslant H_{nk},$$

где A — всевозможные интервалы. Отсюда следует, что если последовательность величин η_{nk} имеет предельное пуассоновское распределение $P(\lambda)$ и $H_{nk}\to 0$, то и последовательность случайных величин S_{nk} имеет то же самое предельное распределение.

Согласно определению А. Н. Колмогорова [1], условимся говорить, что законы распределения сумм S_{nk} сходятся по вариации к закону Пуассона, если $H_{nk}\to 0$ $(n\to\infty)$. В этом направлении представляет интерес работа [2], в которой получены оптимальные результаты о равномерной аппроксимации в смысле сходимости по вариации биномиального распределения.

Основная цель данной статьи — доказать следующую лемму.

Основная лемма. *Пусть* $\varepsilon_{nk}\geqslant 0$ *и* τ_{nk} *удовлетворяют* (2). *Тогда*

$$H_{nk}\leqslant 8w_{nk}e^{2w_{nk}(\lambda_{nk}+a_{nk})}(\lambda_{nk}M_{nk}+a_{nk}),$$

где $a_{nk}=\sum_{i=1}^{k}\int_{R_{\varepsilon_{nk}}} dF_{ni}(x)$, $w_{nk}=\frac{1}{1-M_{nk}}$, *а множество* $R_{\varepsilon_{nk}}=\{x:|x|\geqslant\varepsilon_{nk}\cap|x-1|\geqslant\varepsilon_{nk}\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon_{nk} \geqslant 0$ *и* τ_{nk} *удовлетворяют* (2).

Если предельно пренебрегаемые величины x_{ni} *подчиняются условию* $a_{nk} \to 0$ $(n \to \infty)$, *то законы распределения суммы* S_{nk} *сходятся по вариации к закону Пуассона.*

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon_{nk} \geqslant 0$ *и* τ_{nk} *удовлетворяют* (2).

Если предельно пренебрегаемые величины x_{ni} *подчиняются при* $n \to \infty$ *условиям* $a_{nk} \to 0$, $\lambda_{nk} \to \lambda$, *то к сумме* S_{nk} *применим предельный закон Пуассона с параметром* $\lambda > 0$.

Доказательство основной леммы. Введем вспомогательные случайные величины

$$x'_{ni} = \begin{cases} x_{ni}, & \text{если } |x_{ni}| < \varepsilon_{nk} \text{ или } |x_{ni} - 1| < \varepsilon_{nk}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим $S_{nk} = x'_{n1} + \ldots + x'_{nk}$, $\overline{P}_{nk}^{(m)} = P(|S'_{nk} - m| < \tau_{nk})$, $R_{nk}^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} |P_{nk}^{(m)} - \overline{P}_{nk}^{(m)}|$, $R_{nk}^{(2)} = \sum_{m=k+1}^{\infty} |\overline{P}_{nk}^{(m)} - \Pi_{nk}^{(m)}|$, $R_{nk}^{(3)} = \sum_{m=0}^{k} |\overline{P}_{nk}^{(m)} - \Pi_{nk}^{(m)}|$.

Легко видеть, что $H_{nk} \leqslant R_{nk}^{(1)} + R_{nk}^{(2)} + R_{nk}^{(3)}$. Оценим $R_{nk}^{(1)}$, $R_{nk}^{(2)}$, $R_{nk}^{(3)}$.

1. Оценка $R_{nk}^{(1)}$. Пусть событие

$$\mathfrak{M}_{nk} = \{ |x_{ni}| < \varepsilon_{nk} \cup |x_{ni} - 1| < \varepsilon_{nk},\ i = 1, \ldots, k\},$$
$$\mathfrak{N}_{nk}^{(i)} = \{ |x_{ni}| \geqslant \varepsilon_{nk} \cap |x_{ni} - 1| \geqslant \varepsilon_{nk}\}.$$

Очевидно, что

$$0 \leqslant P_{nk}^{(m)} - P(|S_{nk} - m| < \tau_{nk} \cap \mathfrak{M}_{nk}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} P(|S_{nk} - m| <$$
$$< \tau_{nk} \cap \mathfrak{N}_{nk}^{(i)}) = \sum_{i=1}^{k} P(|S_{nk} - m| < \tau_{nk} | \mathfrak{N}_{nk}^{(i)}) P(\mathfrak{N}_{nk}^{(i)}),$$

$$0 \leqslant \overline{P}_{nk}^{(m)} - P(|S'_{nk} - m| < \tau_{nk} \cap \mathfrak{M}_{nk}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} P(|S'_{nk} - m| <$$
$$< \tau_{nk} | \mathfrak{N}_{nk}^{(i)}) P(\mathfrak{N}_{nk}^{(i)}).$$

Так как $P(|S_{nk} - m| < \tau_{nk} \cap \mathfrak{M}_{nk}) = P(|S'_{nk} - m| < \tau_{nk} \cap \mathfrak{M}_{nk})$, то

$$\sum_{m=0}^{\infty} |P_{nk}^{(m)} - \overline{P}_{nk}^{(m)}| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} [P(|S_{nk} - m| < \tau_{nk} | \mathfrak{N}_{nk}^{(i)}) +$$
$$+ P(|S'_{nk} - m| < \tau_{nk} | \mathfrak{N}_{nk}^{(i)}] P(\mathfrak{N}_{nk}^{(i)}).$$

Отсюда находим, что

$$R_{nk}^{(1)} \leqslant 4a_{nk}. \tag{3}$$

2. Оценка $R_{nk}^{(2)}$. Ввиду (2) событие $(|S'_{nk} - (k+h)| < \tau_{nk})$ влечет за собой хотя бы одно из событий $\mathfrak{N}_{nk}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, k)$, каково бы ни было натуральное число h. Поэтому

$$P(|S'_{nk} - (k+h)| < \tau_{nk}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} P(|S'_{nk} - (k+h)| < \tau_{nk} | \mathfrak{N}_{nk}^{(i)}) P(\mathfrak{N}_{nk}^{(i)}).$$

Отсюда следует, что $\sum_{m=k+1}^{\infty} \overline{P}_{nk}^{(m)} \leqslant 2a_{nk}$, а это вместе с неравенством

$\sum\limits_{m=k+1}^{\infty} \Pi_{nk}^{(m)} \leqslant \lambda_{nk} M_{nk}$ доказывает, что

$$R_{nk}^{(2)} \leqslant 2a_{nk} + \lambda_{nk} M_{nk}. \qquad (4)$$

3. Оценка $R_{nk}^{(3)}$. Обозначим $A_{nk}^{(m)} = \sum\limits_{\varkappa_{nk}^{(m)}} \prod\limits_{s=1}^{m} p_{ni_s}^{(1)} \prod\limits_{t=m+1}^{k} p_{ni_t}^{(0)}$, $B_{nk}^{(m)} = \sum\limits_{\varkappa_{nk}^{(m)}} \left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{k-m} \prod\limits_{s=1}^{m} p_{ni_s}^{(1)}$, $C_{nk}^{(m)} = \sum\limits_{\varkappa_{nk}^{(m)}} \left(\frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{m} \left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{k-m}$, где $p_{ni_s}^{(1)} = \int\limits_{|x-1|<\varepsilon_{nk}} dF_{ni_s}(x)$, $p_{ni_t}^{(0)} = \int\limits_{|x|<\varepsilon_{nk}} dF_{ni_t}(x)$, а $\varkappa_{nk}^{(m)}$ — множество всевозможных перестановок $(i_1, \ldots, i_k)$ чисел $1, 2, \ldots, k$, элементы которых упорядочены согласно неравенствам $i_1 < \ldots < i_m$, $i_{m+1} < \ldots < i_k$. Нетрудно видеть, что

$$R_{nk}^{(3)} \leqslant I_{nk}^{(1)} + I_{nk}^{(2)} + I_{nk}^{(3)} + I_{nk}^{(4)},$$

где $I_{nk}^{(1)} = \sum\limits_{m=0}^{k} |\overline{P}_{nk}^{(m)} - A_{nk}^{(m)}|$, $I_{nk}^{(2)} = \sum\limits_{m=0}^{k} |A_{nk}^{(m)} - B_{nk}^{(m)}|$, $I_{nk}^{(3)} = \sum\limits_{m=0}^{k} |B_{nk}^{(m)} - C_{nk}^{(m)}|$, $I_{nk}^{(4)} = \sum\limits_{m=0}^{k} |C_{nk}^{(m)} - \Pi_{nk}^{(m)}|$.

1. Пусть $L_{nk}^{(i)} = (|x_{ni} - 1| < \varepsilon_{nk})$, $H_{nk}^{(i)} = (|x_{ni}| < \varepsilon_{nk})$. Ввиду (2) событие $(|S'_{nk} - m| < \tau_{nk})$ происходит тогда и только тогда, когда одновременно происходит m событий $L_{nk}^{(i_s)}$ $(s = 1, \ldots, m)$, h событий $\mathfrak{N}_{nk}^{(i_t)}$ $(t = m + 1, \ldots, m + h)$ и $k - m - h$ событий $H_{nk}^{(i_r)}$ $(r = m + h + 1, \ldots, k)$, причем возможны такие объединения, в которых отсутствуют события $\mathfrak{N}_{nk}^{(i_t)}$. Поэтому

$$\overline{P}_{nk}^{(m)} = A_{nk}^{(m)} + \sum_{h=1}^{k-m} \sum_{\varkappa_{nk}^{(m,h)}} \prod_{s=1}^{m} p_{ni_s}^{(1)} \prod_{t=m+1}^{m+h} p_{ni_t}^{(2)} \prod_{r=m+h+1}^{k} p_{ni_r}^{(0)},$$

где $p_{ni_t}^{(2)} = \int\limits_{R_{\varepsilon_{nk}}} dF_{ni_t}(x)$, а $\varkappa_{nk}^{(m,h)}$ — множество всевозможных перестановок $(i_1, \ldots, i_k)$ чисел $1, 2, \ldots, k$, элементы которых упорядочены согласно неравенствам $i_1 < \ldots < i_m$, $i_{m+1} < \ldots < i_{m+h}$, $i_{m+h+1} < \ldots < i_k$.

Так как для любого фиксированного h

$$\sum_{\varkappa_{nk}^{(m,h)}} \prod_{s=1}^{m} p_{ni_s}^{(1)} \prod_{t=m+1}^{m+h} p_{ni_t}^{(2)} \prod_{r=m+h+1}^{k} p_{ni_r}^{(0)} \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant k} \prod_{s=1}^{m} p_{ni_s}^{(1)} \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant k} \prod_{t=1}^{h} p_{ni_t}^{(2)}$$

и

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant k} \prod_{s=1}^{m} p_{ni_s}^{(1)} \leqslant \frac{\lambda_{nk}^m}{m!}, \qquad \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_h \leqslant k} \prod_{t=1}^{h} p_{ni_t}^{(2)} \leqslant \frac{a_{nk}^h}{h!},$$

то

$$0 \leqslant \bar{P}_{nk}^{(m)} - A_{nk}^{(m)} \leqslant \frac{\lambda_{nk}^m}{m!} \sum_{h=1}^{k-m} \frac{a_{nk}^{(h)}}{h!} \leqslant a_{nk} e^{a_{nk}} \frac{\lambda_{nk}^m}{m!},$$

а это доказывает, что

$$I_{nk}^{(1)} \leqslant a_{nk} e^{a_{nk}+\lambda_{nk}}. \tag{5}$$

2. Полагая $\gamma_{ni_l} = \int\limits_{|x| \geqslant e_{nk}} dF_{ni_l}(x)$, разложим $\ln p_{ni_l}^{(0)} = \ln(1-\gamma_{ni_l})$ в ряд Маклорена. Тогда

$$\ln \prod_{t=m+1}^{k} p_{ni_t}^{(0)} = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_{t=m+1}^{k} \gamma_{ni_t}^l,$$

или, что то же самое,

$$\sum_{t=m+1}^{k} p_{ni_t}^{(0)} = \exp\left(-\lambda_{nk} - a_{nk} + \sum_{t=1}^{m} \gamma_{ni_t} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l} \sum_{t=m+1}^{k} \gamma_{ni_t}^l \right).$$

Точно таким же образом находим, что

$$\left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{k-m} = \exp\left[-\lambda_{nk} + \frac{m}{k}\lambda_{nk} - (k-m)\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l}\left(\frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^l \right].$$

В силу этих равенств

$$T_{nk}^{(m)} = \max_{i_1,\ldots,i_k} \left| \prod_{t=m+1}^{k} p_{ni_t}^{(0)} - \left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{k-m} \right| \leqslant \left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{k-m} \max_{i_1,\ldots,i_k} \left| e^{f_{nk}^{(m)}} - 1 \right|,$$

где $f_{nk}^{(m)} = \bar{f}_{nk}^{(m)} - \bar{\bar{f}}_{nk}^{(m)}$, а $\bar{f}_{nk}^{(m)} = \sum\limits_{t=1}^{m} \gamma_{ni_t} + (k-m)\sum\limits_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l}\left(\frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^l$, $\bar{\bar{f}}_{nk}^{(m)} = a_{nk} + \frac{m}{k}\lambda_{nk} + \sum\limits_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l} \sum\limits_{t=m+1}^{k} \gamma_{ni_t}^l$. Если $f_{nk}^{(m)} \geqslant 0$, то $|f_{nk}^{(m)}| \leqslant \bar{f}_{nk}^{(m)}$. Так как

$$\sum_{t=1}^{m} \gamma_{ni_t} \leqslant \min(mM_{nk}, \lambda_{nk} + a_{nk}) = t_{nk}^{(m)}, \quad \lambda_{nk} \leqslant kM_{nk},$$

то

$$|f_{nk}^{(m)}| \leqslant t_{nk}^{(m)} + \frac{1}{2}\lambda_{nk} w_{nk} M_{nk}.$$

Аналогично можно показать, что для случая, когда $f_{nk}^{(m)} < 0$,

$$|f_{nk}^{(m)}| \leqslant t_{nk}^{(m)} + \left(\frac{1}{2}\lambda_{nk} M_{nk} + a_{nk}\right) w_{nk} = h_{nk}^{(m)}.$$

Это позволяет написать следующее неравенство:

$$T_{nk}^{(m)} \leqslant \left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{k-m} h_{nk}^{(m)} e^{h_{nk}^{(m)}}.$$

Легко видеть, что

$$|A_{nk}^{(m)} - B_{nk}^{(m)}| \leqslant T_{nk}^{(m)} \sum_{\varkappa_{nk}^{(m)}} \prod_{s=1}^{m} p_{ni_s}^{(1)}, \qquad \sum_{\varkappa_{nk}^{(m)}} \prod_{s=1}^{m} p_{ni_s}^{(1)} \leqslant \frac{\lambda_{nk}^m}{m!}.$$

Поэтому

$$\sum_{m=0}^{k} |A_{nk}^{(m)} - B_{nk}^{(m)}| \leqslant \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda_{nk}^m}{m!} T_{nk}^{(m)} \leqslant \left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^k \exp\left[\lambda_{nk} + \left(\frac{1}{2}\lambda_{nk} M_{nk} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a_{nk}\right) w_{nk}\right] \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda_{nk}^m}{m!} \left[m M_{nk} + \left(\frac{1}{2}\lambda_{nk} M_{nk} + a_{nk}\right) w_{nk}\right].$$

Отсюда находим, что

$$I_{nk}^{(2)} \leqslant w_{nk}(2\lambda_{nk} M_{nk} + a_{nk})\, e^{2w_{nk}(\lambda_{nk} + a_{nk})}. \tag{6}$$

3. Чтобы оценить $I_{nk}^{(3)}$, запишем $\frac{\lambda_{nk}^m}{m!}$ в следующем виде:

$$\frac{\lambda_{nk}^m}{m!} = \sum_{\varkappa_{nk}^{(m)}} \prod_{s=1}^{m} p_{ni_s}^{(1)} + u_{nk}^{(m)},$$

где $u_{nk}^{(m)} = \frac{1}{m!} \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{\substack{\alpha_1 + \ldots + \alpha_h = m \\ \alpha_t > 0,\ t = 1, \ldots, h}} \frac{m!}{\alpha_1! \ldots \alpha_h!} \sum_{\varkappa_{nk}^{(h)}} \prod_{s=1}^{h} (p_{ni_s}^{(1)})^{\alpha_s}$.

Пусть

$$r_{nk}^{(m)} = \frac{\lambda_{nk}^m}{m!} - \left(\frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^m C_k^m = \frac{\lambda_{nk}^m}{m!}\left[1 - \prod_{h=1}^{m-1}\left(1 - \frac{h}{k}\right)\right].$$

Тогда

$$|B_{nk}^{(m)} - C_{nk}^{(m)}| \leqslant \left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{k-m} (r_{nk}^{(m)} + u_{nk}^{(m)}).$$

Оценим $r_{nk}^{(m)}$. Так как функция $(1-x)^M$, $x \in [0, 1]$, выпукла вниз при $M = 0, 1, \ldots$, то $(1-x)^M \geqslant 1 - Mx$, в частности,

$$1 - \left(1 - \frac{m-1}{k}\right)^{m-1} \leqslant \frac{(m-1)^2}{k}, \quad m = 1, \ldots, k.$$

Поэтому $r_{nk}^{(m)} \leqslant \frac{\lambda_{nk}^{m-1}}{(m-2)!} M_{nk}$. Кроме того, $u_{nk}^{(m)} \leqslant \frac{\lambda_{nk}^{m-1}}{(m-1)!} M_{nk}$. Все это позволяет оценить $I_{nk}^{(3)}$:

$$I_{nk}^{(3)} \leqslant 2\lambda_{nk} e^{\lambda_{nk}} M_{nk}. \tag{7}$$

4. По теореме о среднем значении

$$e^{kx}(1-x)^{k-m} - 1 = x e^{k\theta x}(1 - \theta x)^{k-m-1}(m - k\theta x) \quad (0 < \theta < 1).$$

Полагая $x = \frac{\lambda_{nk}}{k}$, отсюда получаем, что

$$\left| e^{\lambda_{nk}}\left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{k-m} - 1 \right| \leqslant (m + \lambda_{nk})\, e^{\lambda_{nk}} M_{nk}.$$

В силу этого неравенства

$$\bar{i}_{nk}^{(m)} = e^{-\lambda_{nk}} \frac{\lambda_{nk}^m}{m!} \left| 1 - e^{\lambda_{nk}}\left(1 - \frac{\lambda_{nk}}{k}\right)^{k-m} \right| \leqslant \frac{\lambda_{nk}^m}{m!} (m + \lambda_{nk}) M_{nk}.$$

Как доказано ранее, $1-\prod_{h=1}^{m-1}\left(1-\frac{h}{k}\right)\leqslant\frac{(m-1)^2}{k}$. Поэтому

$$\bar{\bar{i}}_{nk}^{(m)}=e^{-\lambda_{nk}}\frac{\lambda_{nk}^m}{m!}\left[1-\prod_{h=1}^{m-1}\left(1-\frac{h}{k}\right)\right]\leqslant e^{-\lambda_{nk}}\frac{\lambda_{nk}^{m-1}}{(m-2)!}M_{nk}.$$

Так как $I_{nk}^{(4)}\leqslant\sum_{m=2}^{\infty}(\bar{i}_{nk}^{(m)}+\bar{\bar{i}}_{nk}^{(m)})$, то легко подсчитать, что

$$I_{nk}^{(4)}\leqslant 3\lambda_{nk}e^{\lambda_{nk}}M_{nk}. \tag{8}$$

Итак, ввиду (5) — (8),

$$R_{nk}^{(3)}\leqslant e^{2w_{nk}(\lambda_{nk}+a_{nk})}w_{nk}\,(7\lambda_{nk}M_{nk}+2a_{nk}). \tag{9}$$

Наконец, принимая во внимание (3), (4) и (9), будем иметь:

$$H_{nk}\leqslant 8w_{nk}e^{2w_{nk}(\lambda_{nk}+a_{nk})}(\lambda_{nk}M_{nk}+a_{nk}).$$

Основная лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей.— Вестник МГУ, 1953, 10, с. 29—38.
2. Прохоров Ю. В. Асимптотическое поведение биномиального распределения.— УМН, 1953, 8, вып. 3, с. 135—142.

Киевский институт
инженеров гражданской авиации

Поступила в редакцию
19.X. 1977 г.