УДК 517.926.45

С. В. Подолян

Об одном алгоритме построения решения линейной периодической краевой задачи

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t), \;\; x \in R^n, \;\; A(t): R^n \to R^n, \tag{1}$$

где матрица $A(t)$ и вектор-функция $f(t)$ интегрируемые кусочно-непрерывные на $[0, \omega]$, $\omega > 0$.

Существованию и единственности решения периодической краевой задачи и выводу алгоритмов построения ее решения в последнее время посвящен ряд работ (см. [1—3]), а также монографии [4, 5]. Определенный интерес представляет предложенный в [6] подход, основанный на учете алгебраических свойств матрицы коэффициентов и позволяющий эффективно исследовать упомянутую задачу.

Используя результаты работы [6], выведем алгоритм регуляризации краевой задачи для системы (1) с условием

$$x(0)=x(\omega). \tag{2}$$

В [6] построено дифференциально-матричное уравнение

$$\frac{\partial \tilde{U}_m(t,\lambda)}{\partial\lambda}=\tilde{P}_m(t,\lambda)\,\tilde{U}_m(t,\lambda),\quad \tilde{U}_m(t,0)=E, \tag{3}$$

где $\tilde{P}_m=\sum_{k=0}^{m}\lambda^k P_k(t),\quad m=0,1,2,\ldots,\lambda\in R;\ P_{r+1}=\int_0^t[A(\tau),\ P_r(\tau)]\,d\tau,$

$r=0,1,2,\ldots;\ P_0=\int_0^t A(\tau)\,d\tau;\quad E=\mathrm{diag}[1,1,\ldots,1].$

Здесь $[\ldots,\ldots]$ — знак коммутатора матриц. На основе уравнения (3) построим вспомогательное дифференциально-матричное уравнение по переменной t, для которого матрица $\tilde{U}_m(t,\lambda)$, $\tilde{U}_m(0,\lambda)=E$, фундаментальная.

Искомое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\tilde{U}_m}{\partial t}=\tilde{\Phi}_m(t,\lambda)\,\tilde{U}_m. \tag{4}$$

Матрицу $\tilde{\Phi}_m(t,\lambda)$, $\tilde{\Phi}_m(0,\lambda)=0$, $\forall\lambda\in R$ найдем из условия интегрируемости

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}_m}{\partial\lambda}=\frac{\partial\tilde{P}_m}{\partial t}+[\tilde{P}_m,\tilde{\Phi}_m]. \tag{5}$$

Известно (см., например, [7], с. 200), что общее решение уравнения

$$\frac{dZ}{d\tau}=F(\tau)+H(\tau)Z+ZM(\tau) \tag{6}$$

имеет вид

$$Z(\tau)=Z_H(\tau)\,CZ_M(\tau)+\int_0^\tau Z_H(\tau)\,Z_H^{-1}(s)\,F(s)\,Z_M^{-1}(s)\,Z_M(\tau)\,ds,$$

где $C=\mathrm{const}$, а Z_H и Z_M — нормированные при $\tau=0$ фундаментальные матрицы соответственно уравнений $\frac{dZ_H}{d\tau}=H(\tau)\,Z_H$, $\frac{dZ_M}{d\tau}=Z_M M(\tau)$. Учитывая это, из условия (5) получаем

$$\tilde{\Phi}_m=\tilde{U}_m(t,\lambda)\int_0^\lambda \tilde{U}_m^{-1}(t,\mu)\,\frac{\partial\tilde{P}_m(t,\mu)}{\partial t}\,\tilde{U}_m(t,\mu)\,d\mu\,\tilde{U}_m^{-1}(t,\lambda). \tag{7}$$

Так как $\left.\frac{\partial\tilde{\Phi}_m(t,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=A(t)$, то для наглядности дальнейших выкладок выделим матрицу λA в виде слагаемого из правой части формулы (7).

Для этого запишем уравнение (5) в виде

$$\frac{\partial(\tilde{\Phi}_m-\lambda A)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\tilde{P}_m}{\partial t}-A+[\tilde{P}_m,\tilde{\Phi}_m-\lambda A]-[\lambda A,\tilde{P}_m].$$

Поскольку $\frac{\partial\tilde{P}_m}{\partial t}-A-\lambda[A,\tilde{P}_m]=-\lambda^{m+1}[A,P_m]$, то $\frac{\partial(\tilde{\Phi}_m-\lambda A)}{\partial\lambda}=$
$=-\lambda^{m+1}[A,P_m]+[\tilde{P}_m,\tilde{\Phi}_m-\lambda A].$

Очевидно, мы получили уравнение вида (6), поэтому можем найти

$$\tilde{\Phi}_m - \lambda A \equiv \tilde{L}_m, \quad \tilde{L}_m = -\tilde{U}_m(t, \lambda) \int_0^\lambda \mu^{m+1} \tilde{U}_m^{-1}(t, \mu) [A(t), P_m(t)] \times \times \tilde{U}_m(t, \mu) \, d\mu \, \tilde{U}_m^{-1}(t, \lambda).$$

Учитывая это, перепишем уравнение (1) в виде $\frac{dx}{dt} = \tilde{\Phi}_m(t, \lambda)|_{\lambda=1} x - \tilde{L}_m(t, \lambda)|_{\lambda=1} x + f(t)$.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$\frac{dy_m}{dt} = \tilde{\Phi}_m(t, 1) y_m, \tag{8}$$

$$y_m(0) = y_m(\omega). \tag{9}$$

Если для некоторого целого $m \geqslant 0$ $\det(E - \tilde{U}_m(\omega, 1)) \neq 0$, то матрица Грина $\Gamma_m(t, \tau, 1)$ этой задачи имеет вид

$$\Gamma_m(t, \tau, 1) = \begin{cases} \tilde{U}_m(t, 1) [E - \tilde{U}_m(\omega, 1)]^{-1} \tilde{U}_m^{-1}(\tau, 1), & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ \tilde{U}_m(t, 1) [E - \tilde{U}_m(\omega, 1)]^{-1} \tilde{U}_m(\omega, 1) \tilde{U}_m^{-1}(\tau, 1), & \omega \geqslant \tau > t \geqslant 0. \end{cases}$$

На основе задачи (8), (9) исходную задачу сведем известным образом (см., например, [8], с. 253) к эквивалентному интегральному уравнению

$$x(t) = \int_0^\omega K_m(t, \tau, 1) x(\tau) \, d\tau + \int_0^\omega \Gamma_m(t, \tau, 1) f(\tau) \, d\tau, \tag{10}$$

где $K_m(t, \tau, 1) = -\Gamma_m(t, \tau, 1) \tilde{L}_m(\tau, 1)$.

Оценим норму ядра $K_m(t, \tau, 1)$:

$$\| K_m(t, \tau, 1) \| \leqslant \| \Gamma_m(t, \tau, 1) \tilde{U}_m(\tau, 1) \| \, \| \tilde{U}_m^{-1}(\tau, 1) \tilde{L}_m(\tau, 1) \|. \tag{11}$$

Здесь и в дальнейшем $\| \ldots \|$ — любая (согласованная) норма, для которой $\| E \| = 1$. Так как

$$\frac{\partial \tilde{U}_m(t, \mu) \tilde{U}_m^{-1}(t, \lambda)}{\partial \lambda} = -\tilde{U}_m(t, \mu) \tilde{U}_m^{-1}(t, \lambda) \tilde{P}_m(t, \lambda),$$

то согласно лемме Беллмана [9], с. 108, имеем

$$\| \tilde{U}_m(t, \mu) \tilde{U}_m^{-1}(t, \lambda) \| \leqslant \exp \int_\mu^\lambda \| \tilde{P}_m(t, \nu) \| \, d\nu, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \lambda. \tag{12}$$

Аналогично выведем неравенство

$$\| \tilde{U}_m(t, \lambda) \tilde{U}_m^{-1}(t, \mu) \| \leqslant \exp \int_\mu^\lambda \| \tilde{P}_m(t, \nu) \| \, d\nu. \tag{13}$$

Применяя неравенства (12), (13), получаем

$$\| \Gamma_m(t, \tau, 1) \tilde{U}_m(\tau, 1) \| \leqslant \delta_m \exp(\beta_m), \quad \| \tilde{U}_m^{-1}(\tau, 1) \tilde{L}_m(\tau, 1) \| \leqslant \frac{k_m}{m+2} \exp(\beta_m),$$

где

$$\delta_m = \max \{ \| [E - \tilde{U}_m(\omega, 1)]^{-1} \|, \ \| [E - \tilde{U}_m^{-1}(\omega, 1)]^{-1} \| \},$$

$$\beta_m = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \int_0^1 \| \tilde{P}_m(t, \nu) \| \, d\nu, \quad k_m = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \| [A(t), P_m(t)] \|.$$

Учитывая в (11) промежуточные оценки, окончательно получаем

$$\|K_m(t, \tau, 1)\| \leqslant \frac{\delta_m k_m}{m+2} \exp(2\beta_m). \tag{14}$$

Итак, если для некоторого целого $m \geqslant 0$ выполнены условия

а) $\det(E - \tilde{U}_m(\omega, 1)) \neq 0$;

б) $\omega\delta_m k_m \exp(2\beta_m) < m + 2$,

то у уравнения (10) существует единственное решение. Значит, при выполнении этих условий краевая задача (1), (2) однозначно разрешима. Ее решение можно найти из уравнения (10) классическим методом последовательных приближений.

Приведем оценку погрешности первого приближения

$$x_0(t) = \int_0^\omega \Gamma_m(t, \tau, 1) f(\tau)\, d\tau.$$

Прежде всего заметим, что если $[A(t), P_m(t)] \equiv 0$, то $x(t) \equiv x_0(t)$, т. е. точное решение имеем на первом шаге. Учитывая оценку (14), в общем случае нетрудно получить

$$\|x(t) - x_0(t)\| \leqslant \frac{h\omega k_m \delta_m \exp(2\beta_m)}{m + 2 - \omega\delta_m k_m \exp(2\beta_m)}, \tag{15}$$

где $h = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|x_0(t)\|$.

Из (15) заключаем, что большую роль в оценке погрешности первого и последующих приближений играет константа k_m. Заметим, что k_m убывает с ростом m. Это видно из оценки $\|[A(t), P_m(t)]\| \leqslant \alpha \frac{(2\alpha\omega)^{m+1}}{(m+1)!}$, где $\alpha = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \|A(t)\|$. Оценка погрешности других приближений выводится стандартными приемами

Отметим в заключение, что случай $m = 0$ рассмотрен в несколько иной интерпретации в работе [3]. Значит, получен более общий алгоритм такого типа построения решения рассмотренной задачи.

Этот алгоритм распространяется и на нелинейные уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\, x + f(t, x), \tag{16}$$

где вектор-функция $f(t, x)$ непрерывна по $t, x \in R^1 \times R^n$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной L, причем $f(t, 0) \not\equiv 0$.

Нетрудно показать, что при выполнении условия а) и оценки

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant \omega} \int_0^\omega \{\|K_m(t, \tau, 1)\| + \|\Gamma_m(t, \tau, 1)\| L\}\, d\tau < 1 \tag{17}$$

периодическая краевая задача для уравнения (16) однозначно разрешима. Так как $\|\Gamma_m(t, \tau, 1)\| \leqslant \delta_m \exp(2\beta_m)$, то вместо (17) можно взять более удобное для проверки условие $\left(\frac{k_m}{m+2} + L\right)\omega\delta_m \exp(2\beta_m) < 1$.

Решение этой задачи приближенно находим из уравнения типа (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Nixdorff K. Zur iterativen Bestimmung nichtlinearer Schwingungen.— Zeitschrift für angewandte Methem. und Mechanik, 1974, **54**, S. 819—822.
2. Кибенко А. В. Об одном приближенном методе нахождения периодических решений линейных нестационарных систем.— Тр. НИИ математики при ВГУ, Воронеж, 1975, вып. 17, с. 41—45.
3. Лаптинский В. Н. О линейных системах с периодическими коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1975, **11**, № 10, с. 1899—1901.

4. Л и к а Д. К., Р я б о в Ю. А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев, «Штиинца», 1974. 290 с.
5. С а м о й л е н к о А. М., Р о н т о Н. И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. К., «Вища школа», 1976. 180 с.
6. Л а п т и н с к и й В. Н. Исследование устойчивости линейных периодических дифференциальных систем методом вариации параметра.— Дифференц. уравнения, 1976. **12**, № 9, с. 1713—1718.
7. В а з о в В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968. 462 с.
8. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971. 703 с.
9. Д е м и д о в и ч Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967. 472 с.

Могилевский филиал
Института физики АН БССР

Поступила в редакцию
15.V. 1977 г.