УДК 517.51

Р. Т. Рахмаил

Уточнения и обращения некоторых неравенств для выпуклых и вогнутых последовательностей

В данной заметке получены некоторые неравенства. Одно из них — уточнение неравенства со средними степенными для выпуклых последовательностей.

Как известно, среднее степенное

$$M_p(a) = \begin{cases} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^p \right\}^{\frac{1}{p}}, & p \neq 0, \\ \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}, & p = 0 \end{cases}$$

— возрастающая функция от p. Если r, s — любые действительные числа, $r < s$, то

$$\frac{M_s(a)}{M_r(a)} \geqslant 1 \tag{1}$$

при условии, что не все неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны между собой.

Для интегральных средних степенных $M_p(f)=\left\{\int\limits_0^1 f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}$, если $0< r<s$, $f(x)$ — выпуклая возрастающая, дважды дифференцируемая функция и $f'(x)>0$, $f''(x)\geqslant 0$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, в работе [1] получено уточнение неравенства $\frac{M_s(f)}{M_r(f)}\geqslant 1$, а именно доказано, что

$$\frac{M_s(f)}{M_r(f)}\geqslant\frac{(r+1)^{1/r}}{(s+1)^{1/s}}, \tag{2}$$

где константа $\frac{(r+1)^{1/r}}{(s+1)^{1/s}}>1$ при $0<r<s$.

В теореме 1 доказывается дискретный аналог неравенства (2).

В теореме 2 получено обращение неравенства Чебышева для вогнутых последовательностей. Аналогичный результат для интегрального неравенства Чебышева получен в теореме 1 работы [2].

В теореме 3 доказывается уточнение неравенства Гельдера для выпуклых последовательностей в случае, когда p, q — действительные числа, $0<p\leqslant 1$ и $0<q\leqslant 1$. Аналогичный результат доказан для интегрального неравенства Гельдера в работе [2] (см. теорему 3).

Теорема 1. *Пусть заданная последовательность неотрицательных чисел возрастающая и выпуклая* $0=a_1<a_2<\ldots<a_n$, $a_{i+1}-2a_i+a_{i-1}\geqslant 0$, $i=2,\ldots,n-1$, *и пусть* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *любые положительные числа, удовлетворяющие условию* $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. *Тогда для* $r, s\in R$ *при* $0<r<s$ *имеет место неравенство*

$$\frac{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i a_i^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i a_i^r\right\}^{1/r}}\geqslant C, \tag{3}$$

где C — *константа, вычисляемая по формуле*

$$C=\frac{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(i-1)^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(i-1)^r\right\}^{1/r}}.$$

Равенство в неравенстве (3) *достигается, когда* $a=i-1$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Заметим, что неравенство (3) уточняет неравенство (1), ибо константа $C>1$ при $r>s$.

Доказательство. Согласно условию теоремы заданная последовательность выпукла, а это означает, что ее вторые разности неотрицательны, т. е. $a_{i+1}-2a_i+a_{i-1}\geqslant 0$, $i=2, 3, \ldots, n-1$.

Из этих соотношений следует неотрицательность произведений $(i-1)(a_{i+1}-2a_i+a_{i-1})\geqslant 0$, $i=2,3,\ldots,n-1$.

Выберем натуральное число k так, чтобы $3\leqslant k\leqslant n$. Тогда $\sum\limits_{i=2}^{k-1}(i-$

$- 1)(a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}) \geqslant 0$. Преобразовав левую часть неравенства

$$\sum_{i=2}^{k-1} (i-1)(a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}) = \sum_{i=2}^{k-1} (i-1) a_{i+1} -$$

$$- 2\sum_{i=2}^{k-1} (i-1) a_i + \sum_{i=2}^{k-1} (i-1) a_{i-1} = \sum_{i=3}^{k} (i-2) a_i -$$

$$- 2\sum_{i=2}^{k-1} (i-1) a_i + \sum_{i=1}^{k-2} i a_i = -(k-1) a_{k-1} + (k-2) a_k,$$

получим $-(k-1) a_{k-1} + (k-2) a_k \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{a_k}{k-1} \geqslant \frac{a_{k-1}}{k-2}, \quad 3 \leqslant k \leqslant n. \tag{4}$$

Между средними степенными порядка r и s в неравенстве

$$\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^s}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right\}^{\frac{1}{s}} \geqslant \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^r}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right\}^{\frac{1}{r}}$$

примем $p_i = \alpha_i (i-1)^s$, $x_i = \dfrac{a_i}{i-1}$. Тогда получим

$$\frac{\left\{\sum_{i-1}^{n} \alpha_i a_i^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^s\right\}^{1/s}} \geqslant \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^{s-r} a_i^r\right\}^{1/r}}{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^s\right\}^{1/r}}. \tag{5}$$

В неравенстве Чебышева для одинаково монотонных последовательностей положительных чисел $\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i A_i B_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i A_i \sum_{i=1}^{n} p_i B_i$ положим $A_i = \dfrac{a_i^r}{(i-1)^r}$, $B_i = (i-1)^{s-r}$, $p_i = (i-1)^r \alpha_i$. Очевидно, что последовательность $\{B_i\}$ возрастает, а возрастание последовательности $\{A_i\}$ следует из неравенства (4). Таким образом, из неравенства Чебышева для последовательностей $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получаем неравенство

$$\sum_{i=2}^{n} \alpha_i (i-1)^r \sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_i^r (i-1)^{s-r} \geqslant \sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_i^r \sum_{i=2}^{n} \alpha_i (i-1)^s.$$

Так как $a_1 = 0$, то в последнем неравенстве можно суммировать по i от 1 до n.

Элементарными преобразованиями приведем это неравенство к виду

$$\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^{s-r} a_i^r\right\}^{1/r}}{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^s\right\}^{1/r}} \geqslant \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^r\right\}^{1/r}}{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^r\right\}^{1/r}}. \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) вытекает сформулированное в теореме неравенство (3).

Замечание 1. Если в доказанном неравенстве положить $\alpha_i = \frac{1}{n}$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^s \frac{1}{n}$ — интегральная сумма для интеграла $\int_0^1 x^s dx$, поэтому константа C в правой части полученного неравенства при $n \to \infty$ стремится к числу $\frac{(r+1)^{1/r}}{(s+1)^{1/s}}$ неравенства (2), доказательство которого см. в [1].

Теорема 2. *Если $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — вогнутые возрастающие последовательности, причем $a_1 = b_1 = 0$, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — любые положительные числа, то справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \leqslant C \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i,$$

где константа C вычисляется по формуле $C = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (i-1)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i}{\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i (i-1)\right\}^2}$.

Доказательство. Согласно условию теоремы последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, вогнутые. Используя метод, аналогичный применяемому при доказательстве теоремы 1 в случае выпуклых последовательностей, получаем $\frac{a_{k-1}}{k-2} \geqslant \frac{a_k}{k-1}$, $k = 3, \ldots, n$, т. е. последовательность $\left\{\frac{a_i}{i-1}\right\}$, $i = 2, \ldots, n$, невозрастающая. По аналогии последовательность $\left\{\frac{b_i}{i-1}\right\}$, $i = 2, \ldots, n$, — невозрастающая.

В неравенстве Чебышева для противоположно монотонных последовательностей $\sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{i=1}^{n} P_i A_i B_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} P_i A_i \sum_{i=1}^{n} P_i B_i$ положим $P_i = p_i (i-1)$, $A_i = \frac{a_i}{i-1}$, $B_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, поскольку $\{A_i\}$ — невозрастающая, а $\{B_i\}$ — неубывающая последовательности,

$$\sum_{i=2}^{n} p_i (i-1) \sum_{i=2}^{n} p_i a_i b_i \leqslant \sum_{i=2}^{n} p_i a_i \sum_{i=2}^{n} p_i (i-1) b_i. \tag{7}$$

Если же в указанном неравенстве Чебышева положим $P_i = p_i (i-1)$, $A_i = i-1$, $B_i = \frac{b_i}{i-1}$, где $\{A_i\}$ — возрастающая последовательность, а $\{B_i\}$ — невозрастающая, то получим неравенство

$$\sum_{i=2}^{n} p_i (i-1) \sum_{i=2}^{n} p_i (i-1) b_i \leqslant \sum_{i=2}^{n} p_i (i-1)^2 \sum_{i=2}^{n} p_i b_i. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) следует неравенство

$$\sum_{i=2}^{n} p_i a_i b_i \leqslant \frac{\sum_{i=2}^{n} p_i (i-1)^2}{\left\{\sum_{i=2}^{n} p_i (i-1)\right\}^2} \sum_{i=2}^{n} p_i a_i \sum_{i=2}^{n} p_i b_i.$$

Так как $a_1=b_1=0$, то в последнем неравенстве можно суммировать по i от 1 до n. Умножив обе части этого неравенства на $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$, получим доказываемое неравенство.

Замечание 2. Если в доказанном неравенстве положим все $p_i = \frac{1}{n}$, то константа C примет вид $C = \dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)^2}{\frac{1}{n^2}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)\right\}^2} = \dfrac{4n-2}{3(n-1)}$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} C = \frac{4}{3}$ (см. [2]).

Теорема 3. *Пусть $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$, $i=1, 2, \ldots, n$, — выпуклые и возрастающие последовательности, причем $a_1=b_1=0$, и пусть p и q — действительные числа, удовлетворяющие условиям $0<p\leqslant 1$, $0<q\leqslant 1$. Имеет место следующее неравенство:* $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}} \geqslant C$, *где константа вычисляется по формуле* $C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)^2}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)^p\right\}^{1/p}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)^q\right\}^{1/q}}$.

Записанное выше неравенство — уточнение неравенства Гельдера в классе выпуклых последовательностей.

Доказательство. В неравенстве

$$\sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i (i-1)^2}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i (i-1)\right\}^2}\sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i,$$

полученном в [3] как уточнение неравенства Чебышева, положим $p_i = \frac{1}{n}$ для всех $i=1, \ldots, n$. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)^2}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}(i-1)\right\}^2}\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

С помощью этого неравенства оценим отношение $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p}\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{1/q}}$, где p и q — указанные в условии теоремы действительные числа. Имеем

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{1/q}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2}{\left\{\sum_{i=1}^{n} (i-1)\right\}^2} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p}} \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{1/q}}.$$

В правой части полученного выше неравенства кроме константы $\frac{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2}{\left\{\sum_{i=1}^{n} (i-1)\right\}^2}$ имеем два отношения средних степенных от выпуклых последовательностей $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ с показателями 1 и p в первом отношении, 1 и q — во втором отношении. Для оценки снизу этих отношений применим неравенство $\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^r\right\}^{1/r}} \geqslant \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^r\right\}^{1/r}}$, положив в нем $\alpha_i = \frac{1}{n}$:

$$\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right\}^{1/r}} \geqslant \frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^r\right\}^{1/r}}, \quad 0 < r < s.$$

Итак, имеем $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} (i-1)}{\left\{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^p\right\}^{1/p}}$. Аналогично, $\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{1/q}} \geqslant$ $\geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} (i-1)}{\left\{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^q\right\}^{1/q}}$. Окончательно получим

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{1/q}} \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2}{\left\{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{i=1}^{n} (i-1)^q\right\}^{1/q}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунова Е. К., Левин В. И. Некоторые следствия из теорем о суперпозиции выпуклых функций.— Волжский мат. сб., 1969, с. 14—19.
2. Рахманл Р. Т. Обращения и уточнения некоторых классических неравенств.— В кн.: Дифференциальные уравнения и неравенства, 1972, с. 4—13.
3. Vasić P. M., Dordević R. Z. Ĉebyŝev inequality for convex sets.—Publ. elektr. fak., ser. mat. i fiz, 1973, № 412—460, s. 17—20.

Армавирский
педагогический институт

Поступила в редакцию 30.VI. 1977 г.,
после переработки — 23.I. 1978 г

где p и q — указанные в условии теоремы действительные числа. Имеем

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p} \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{1/q}} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^2}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)\right\}^2} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p}} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{1/q}}.$$

В правой части полученного выше неравенства кроме константы $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^2}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)\right\}^2}$ имеем два отношения средних степенных от выпуклых последовательностей $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ с показателями 1 и p в первом отношении, 1 и q — во втором отношении. Для оценки снизу этих отношений примени неравенство $\frac{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i^r\right\}^{1/r}} \geqslant \frac{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i (i-1)^r\right\}^{1/r}}$, положив в нем $\alpha_i = \frac{1}{n}$:

$$\frac{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^r\right\}^{1/r}} \geqslant \frac{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^s\right\}^{1/s}}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^r\right\}^{1/r}}, \quad 0 < r < s.$$

Итак, имеем $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p}} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^p\right\}^{1/p}}$. Аналогично, $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{1/q}} \geqslant$

$\geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^q\right\}^{1/q}}$. Окончательно получим

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right\}^{1/p} \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right\}^{1/q}} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^2}{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^p\right\}^{1/p} \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} (i-1)^q\right\}^{1/q}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунова Е. К., Левин В. И. Некоторые следствия из теорем о суперпозиции выпуклых функций.— Волжский мат. сб., 1969, с. 14—19.
2. Рахманл Р. Т. Обращения и уточнения некоторых классических неравенств.— В кн.: Дифференциальные уравнения и неравенства, 1972, с. 4—13.
3. Vasić P. M., Đorđević R. Z. Čebyšev inequality for convex sets.—Publ. elektr. fak., ser. mat. i fiz, 1973, № 412—460, s. 17—20.

Армавирский
педагогический институт

Поступила в редакцию 30.VI. 1977 г.,
после переработки — 23.I. 1978 г