УДК 517.928

В. А. Плотников, А. Т. Яровой

Обоснование одной схемы усреднения для систем стандартного вида на конечном промежутке

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = \varepsilon X(t, x), \ x(0) = x_0. \tag{1}$$

Пусть существует такая функция $\tilde{X}(t, x)$, для которой

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [X(t, x) - \tilde{X}(t, x)]\, dt = 0. \tag{2}$$

Тогда системе (1) поставим в соответствие систему [1]

$$\dot{\xi} = \varepsilon \tilde{X}(t, \xi), \ \xi(0) = x_0 \tag{3}$$

и назовем ее усредненной.

Рассмотрим вопрос о близости решений систем (1) и (3) на конечном промежутке.

Теорема 1. *Пусть в области $Q\{t \geqslant 0, \ x \in D \subset E_n\}$ выполнены следующие условия:*

1) *функции $X(t, x)$ и $\tilde{X}(t, x)$ ограничены постоянной M и удовлетворяют условию Липшица по переменной x с постоянной λ;*

2) *равномерно по отношению к x в области D существует предел (2);*

3) *решение $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = x(0) \in D' \subset D$ усредненной системы при $t \geqslant 0$ для всех $\varepsilon \in (0, \sigma]$ лежит в области D с некоторой ρ-окрестностью.*

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, для которого при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство $\| x(t) - \xi(t) \| < \eta$, где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения соответственно систем (1) и (3), удовлетворяющие условию $x(0) = \xi(0) \in D'$.

Доказательство. Из (1) и (3) имеем

$$x(t) - \xi(t) = \varepsilon \int_0^t \{[X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, \xi(\tau))] + [X(\tau, \xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau, \xi(\tau))]\}\, d\tau.$$

Следовательно,

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant \varepsilon\lambda \int_0^t \| x(\tau) - \xi(\tau) \|\, d\tau + \varepsilon \left\| \int_0^t [X(\tau, \xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau, \xi(\tau))]\, d\tau \right\|.$$

По лемме Гронуолла — Беллмана

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant \varepsilon \sup_{0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}} \left\| \int_0^t [X(\tau, \xi(\tau)) - \tilde{X}(\tau, \xi(\tau))]\, d\tau \right\| \exp(\lambda L).$$

Разделим отрезок $I = [0, L\varepsilon^{-1}]$ на m равных частей и положим $\xi(t_i) = \xi_i$, $t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}$, $i = \overline{0,m}$.

Предположим, что $t \in (t_k, t_{k+1})$ для некоторого k, $0 \leqslant k \leqslant m - 1$.

После несложных выкладок получаем оценки:

$$\varepsilon\left\|\int_0^t [X(\tau, \xi(\tau)) - \widetilde{X}(\tau, \xi(\tau))]\,d\tau\right\| \leqslant \varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(\tau, \xi(\tau)) - X(\tau, \xi_i)\|\,d\tau +$$

$$+\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\widetilde{X}(\tau, \xi_i) - \widetilde{X}(\tau, \xi(\tau))\|\,d\tau + \varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\left\|\int_0^{t_{i+1}} [X(\tau, \xi_i) - \widetilde{X}(\tau, \xi_i)]\,d\tau\right\| +$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{m-1}\left\|\int_0^{t_i} [X(\tau, \xi_i) - \widetilde{X}(\tau, \xi_i)]\,d\tau\right\| + \varepsilon\left\|\int_0^t [X(\tau, \xi_k) - \widetilde{X}(\tau, \xi_k)]\,d\tau\right\|,$$

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\widetilde{X}(\tau, \xi(\tau)) - \widetilde{X}(\tau, \xi_i)\|\,d\tau \leqslant \frac{ML^2\lambda}{m},$$

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|X(\tau, \xi(\tau)) - X(\tau, \xi_i)\|\,d\tau \leqslant \frac{ML^2\lambda}{m}.$$

В силу условия 2) существует такая монотонно убывающая функция $f(t)$, стремящаяся к 0 при $t \to \infty$, что во всей области D $\left\|\int_0^t [X(\tau, \xi) - \widetilde{X}(\tau, \xi)]\,d\tau\right\| < tf(t)$. Следовательно,

$$\left\|\varepsilon\int_0^t [\widetilde{X}(\tau, \xi_k) - \widetilde{X}(\tau, \xi_k)]\,d\tau\right\| < \varepsilon t f(t) \leqslant F_1(\varepsilon),$$

где $F_1(\varepsilon) = \sup\limits_{\tau\in[0, L]}\left[\tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right]$, $\tau = \varepsilon t$. Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_1(\varepsilon) = 0$.

Таким образом,

$$\varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\left\|\int_0^{t_{i+1}} [X(\tau, \xi_i) - \widetilde{X}(\tau, \xi_i)]\,d\tau\right\| + \varepsilon\sum_{i=0}^{m-1}\left\|\int_0^{t_i} [X(\tau, \xi_i) - \widetilde{X}(\tau, \xi_i)]\,d\tau\right\| +$$

$$+\varepsilon\left\|\int_0^t [X(\tau, \xi_k) - \widetilde{X}(\tau, \xi_k)]\,d\tau\right\| \leqslant 2mF_1(\varepsilon) \equiv F(\varepsilon, m).$$

Итак, $\varepsilon\left\|\int_0^t [X(\tau, \xi(\tau)) - \widetilde{X}(\tau, \xi(\tau))]\,d\tau\right\| \leqslant \frac{2ML^2\lambda}{m} + F(\varepsilon, m) \equiv a(\varepsilon, m)$.

Соответствующим выбором достаточно большого m и малого ε величина $a(\varepsilon, m)$ может быть сделана сколь угодно малой.

Значит, на отрезке I имеет место оценка $\|x(t) - \xi(t)\| \leqslant a(\varepsilon, m)\exp(\lambda L)$.

Доказательство того, что траектория $x(t)$ не покидает множество D, проводится аналогично [2]. Полагая $a(\varepsilon, m) < \exp(-\lambda L)\min(\rho, \eta)$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть в области* $Q\{t \geqslant 0, x \in D\}$ *выполнены следующие условия*:

1) *функция* $X(t, x)$ *ограничена постоянной* M, *равномерно непрерывна по* x *равномерно относительно* t;

2) *равномерно относительно* x *в области* D *существует предел* (2);

3) *функция* $\tilde{X}(t, x)$ *удовлетворяет условию Липшица по* x *с постоянной* λ *и* $\tilde{X}(t, x)$ *ограничена постоянной* M;

4) *решение* $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = x(0) \in D' \subset D$ *усредненной системы для всех* $t \geqslant 0$ *и* $\varepsilon \in (0, \sigma]$ *лежит в области* D *с некоторой* ρ-*окрестностью.*

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, *что при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *на отрезке* $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ *будет выполняться неравенство* $\| x(t) - \xi(t) \| < \eta$, *где* $x(t)$ *и* $\xi(t)$ — *решения соответственно систем* (1) *и* (3), *удовлетворяющие условию* $\xi(0) = x(0) \in D'$.

Доказательство. Из условия (3) и леммы Гроноулла—Беллмана легко получаем

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant \sup_{t \in [0, L\varepsilon^{-1}]} \left\| \int_0^t [X(\tau, x(\tau)) - \tilde{X}(\tau, x(\tau))] \, d\tau \right\| \exp(\lambda L).$$

На отрезке I оценим выражение $\varepsilon \left\| \int_0^t [X(\tau, x(\tau)) - \tilde{X}(\tau, x(\tau))] \, d\tau \right\|$. Разделим отрезок I на m равных частей и положим $x(t_i) = x_i$, $i = \overline{0, m}$. Предположим, что $t \in (t_k, t_{k+1})$ для некоторого k, $0 \leqslant k \leqslant m-1$.

Имеем

$$\varepsilon \left\| \int_0^t [X(\tau, x(\tau)) - \tilde{X}(\tau, x(\tau))] \, d\tau \right\| \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, x_i) \| \, d\tau +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \left\| \int_0^{t_{i+1}} [X(\tau, x_i) - \tilde{X}(\tau, x_i)] \, d\tau \right\| + \varepsilon \sum_{i=1}^{m-1} \left\| \int_0^{t_i} [X(\tau, x_i) - \tilde{X}(\tau, x_i)] \, d\tau \right\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_0^t [X(\tau, x_k) - \tilde{X}(\tau, x_k)] \, d\tau \right\| + \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| \tilde{X}(\tau, x_i) - \tilde{X}(\tau, x(\tau)) \| \, d\tau.$$

В силу условия 1) теоремы $\forall \delta > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ такое, что $\| X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, x_i) \| \leqslant \delta$ как только $\| x(\tau) - x_i \| \leqslant \delta_1$. Так как $\tau \in [t_i - t_{i+1}]$, то на этом промежутке справедлива оценка $\| x(\tau) - x_i \| \leqslant \frac{ML}{m}$. Выберем m таким, чтобы величина $\| x(\tau) - x_i \|$ была меньше δ_1. Тогда

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| X(\tau, x(\tau)) - X(\tau, x_i) \| \, d\tau \leqslant L\delta.$$

Далее в силу условия 2) теоремы существует такая монотонно убывающая функция, стремящаяся к 0 при $t \to \infty$, которая во всей области D $\varepsilon \| \int_0^t [X(\tau, x) - \tilde{X}(\tau, x)] \, d\tau \| < tf(t)$.

Тогда

$$\varepsilon \left\| \int^{t_{i+1}} [X(\tau, x_i) - \tilde{X}(\tau, x_i)] \, d\tau \right\| < \varepsilon t_{i+1} f(t_{i+1}) \leqslant F_1(\varepsilon),$$

$$\varepsilon \left\| \int_0^t [X(\tau, x_k) - \tilde{X}(\tau, x_k)] \, d\tau \right\| < \varepsilon t f(t) \leqslant F_1(\varepsilon),$$

где $F_1(\varepsilon) = \sup_{\tau \in [0, L]} \left[\tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \right]$, а $\tau = \varepsilon t$.

Таким образом,

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \left\| \int_{0}^{t_{i+1}} [X(\tau, x_i) - \tilde{X}(\tau, x_i)]\, d\tau \right\| + \varepsilon \sum_{i=1}^{m-1} \left\| \int_{0}^{t_i} [X(\tau, x_i) - \tilde{X}(\tau, x_i)]\, d\tau \right\| +$$

$$+ \varepsilon \left\| \int_{0}^{t} [X(\tau, x_k) - \tilde{X}(\tau, x_k)\, d\tau \right\| \leqslant 2mF_1(\varepsilon) \equiv F(\varepsilon, m).$$

Так как $\tilde{X}(t, x(t))$ удовлетворяет условию Липшица, то $\varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \| \tilde{X}(\tau, x_i) - \tilde{X}(\tau, x(\tau)) \| \, d\tau \leqslant \frac{\lambda ML^2}{m}$. Обозначим $L\delta + F(\varepsilon, m) + \frac{\lambda ML^2}{m} = a(\varepsilon, m)$.

Дальнейшее доказательство проводится аналогично соответствующей части доказательства теоремы 1.

Заметим, что решение $x(t)$ может быть не единственным. В этом случае теорема утверждает, что весь пучок решений системы (1) с начальной точкой $x(0)$ лежит в окрестности единственного решения $\xi(t)$ уравнения (3).

Теорема 3. *Пусть в области $Q\{t \geqslant 0, x \in D \subset E_n\}$, где D замкнуто, выполнены следующие условия:*

1) *функция $X(t, x)$ непрерывна по x равномерно относительно t, $\| X(t, x \| \leqslant M$;*

2) *в каждой точке $x \in D$ существует предел (2);*

3) *функция $\tilde{X}(t, x)$ локально удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ, $\| \tilde{X}(t, x) \| \leqslant M$;*

4) *решение $\xi(t)$, $\xi(0) = x^0 \in D' \subset D$ для всех $t \geqslant 0$ и $\varepsilon \in (0, \sigma]$ лежит в области D вместе со своей ρ-окрестностью.*

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ существует такое $\varepsilon^0(\eta, L, x^0)$, для которого при $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство $\| x(t) - \xi(t) \| < \eta$, где $x(t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию $x(0) = x^0$.

Доказательство. Так как $\| x(t) - x(0) \| \leqslant ML$ и $\| \xi(t) - \xi(0) \| \leqslant ML$, то $x(t)$ и $\xi(t)$ принадлежат шару $S_{ML}(x^0)$. Построим множество $S_D = S_{ML}(x^0) \cap D$, тогда вместо множества Q рассмотрим множество $Q(x^0)\{t \geqslant 0, x \in S_D\}$. В силу компактности S_D и условия 1) функция $X(t, x)$ на S_D равномерно непрерывна по x равномерно относительно t, т. е. $\forall \delta > 0\ \exists d > 0$, что $\| X(t, x_1) - X(t, x_2) \| \leqslant \delta$ как только $\| x_1 - x_2 \| \leqslant d$.

Рассмотрим на множестве S_D функцию $F_T(x) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} X(t, x)\, dt$. Тогда $\| F_T(x_1) - F_T(x_2) \| \leqslant \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \| X(t, x_1) - X(t, x_2) \| \, dt \leqslant \delta$, если $\| x_1 - x_2 \| \leqslant d$, т. е. последовательность функций $F_T(x)$ равностепенно непрерывна на S_D. А так как каждая равностепенно непрерывная последовательность функций, сходящаяся в каждой точке компакта S_D, сходится равномерно на нем, то предел (2) существует равномерно по отношению к x в области S_D. В силу компактности множества S_D функция $\tilde{X}(t, x)$ удовлетворяет на этом множестве условию Липшица с некоторой постоянной λ, очевидно зависящей от выбора x^0 и L.

Таким образом, на множестве $Q(x^0)$ выполнены все условия теоремы 2. Следовательно, теорема 3 доказана.

Пусть

$$\tilde{X}(t, \xi) = \left\{ X_i(\xi) = \frac{1}{T} \int\limits_{iT}^{(i+1)T} X(t, \xi)\, dt,\ iT \leqslant t < (i+1)T,\ i = 0, 1, \dots \right\}, \tag{4}$$

где T — постоянная величина.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть в области $Q\{t \geqslant 0, x \in D \subset E_n\}$ выполнены следующие условия:*

1) *функция $X(t, x)$ и $\tilde{X}(t, x) \in \mathrm{Lip}_x(\lambda, Q)$ и ограничены константой M;*

2) *решение $\xi = \xi(t)$, $\xi(0) = x(0) \in D' \subset D$ усредненной системы для $t \geqslant 0$ и $\varepsilon \in (0, \sigma]$ лежит в области D с некоторой ρ-окрестностью.*

Тогда для любого сколь угодно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(L) \in (0, \sigma]$ и $C(L, T) > 0$, что для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ будут выполняться неравенства

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant C\varepsilon, \tag{5}$$

где $x(t)$ и $\xi(t)$ — решения соответственно систем (1) и (3), удовлетворяющие условию $\xi(0) = x(0) \in D'$.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теорем 1 и 2.

Замечание. Если функция $X(t, x)$ имеет период T^0, то, выбрав в (4) $T = T^0$, имеем $\tilde{X}(t, \xi) = X_0(\xi)$.

Таким образом, из теоремы следует доказательство справедливости оценки (5) для схемы полного усреднения с периодической по t правой частью [3].

Следствие 1. *Пусть $\tilde{X}(t, x) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(t, x)\, dt \equiv X_0(x)$, тогда соотношение (2) справедливо, т. е. при данном выборе $\tilde{X}(t, x) = X_0(x)$ теорема 1 аналогична теореме Боголюбова (см. [3]), а теорема 3 — теореме Филатова [4], если дополнительно потребовать, чтобы функция $X(t, x)$ удовлетворяла по x условию Липшица.*

Следствие 2. *Пусть $X(t, x) = X_1(t, x) + X_2(t, x)$, а $\tilde{X}(t, x) = X_1(t, x) + \overline{X}_2(x)$, где $\overline{X}_2(x) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X_2(t, x)\, dt$. При таком выборе функции $\tilde{X}(t, x)$ соотношение (2) выполнено и, значит, из теорем (1) и (3) следуют теоремы Филатова по обоснованию первой и второй схем частичного усреднения [4, 5].*

Следствие 3. *Пусть $X(t, x) = A(t, x) f(t, x)$, а $\tilde{X}(t, x) = \overline{A}(x) f(t, x)$, где $f(t, x)$ строго монотонная по t и непрерывно дифференцируема по всем аргументам функция, $\overline{A}(x) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T A(t, x)\, dt$.*

Используя теорему о среднем, легко показать выполнение соотношения (2), тем самым при указанных выше предположениях рассмотренные теоремы дают обоснование третьей схемы частичного усреднения [4, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Задорожный В. Г. Расширение области применимости метода усреднения.— Первая Туркм. республ. конф. математиков по дифференциальным уравнениям, 1972, с. 61—63.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 504 с.
3. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.— 440 с.
4. Филатов А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.— Ташкент: Фан, 1974.— 216 с.
5. Филатов А. Н. О частичном усреднении в системах обыкновенных дифференциальных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 6, с. 1118—1120.
6. Шарова Л. В. Об одном способе частичного усреднения в дифференциальных уравнениях.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 6, с. 1074—1077.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию
30.XII.1977 г.