УДК 517.52

В. А. Зморович, Л. Г. Репнина

К теории сходимости бесконечных числовых рядов

В данной заметке приведены некоторые теоремы о сходимости бесконечных рядов, полезные в приложениях и представляющие, по нашему мнению, теоретический интерес.

1. Теорема 1. *Пусть дан ряд* $\sum_{1}^{\infty} f(k)\, e^{ig(k)}$, *где* $g(k)$ — *вещественная функция целочисленного аргумента* k, *удовлетворяющая условиям:*

1) $\Delta(k)=g(k+1)-g(k)>0$; 2) $\Delta(k+1)\leqslant\Delta(k)$; 3) $\Delta(k)\to 0$ *при* $k\to\infty$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}[n\Delta(n)]=+\infty$.

Тогда, если $f(k)\to 0$ *при* $k\to\infty$ *и ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{|f(n)-f(n+1)|}{g(n+1)-g(n)}$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty}f(k)\,e^{ig(k)}$.

Для доказательства теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty}a_kb_k$, *где* a_k и b_k — *комплексные числа. Положим* $A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$, $A_0=0$ *и пусть* $|A_k|\leqslant M_k$, *где* $M_k\leqslant M_{k+1}$, $k=1, 2, 3, \ldots$. *Если* $b_k\to 0$ *при* $k\to+\infty$ *и ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty}M_k|b_k-b_{k+1}|$ *сходится, то сходится также и ряд* $\sum\limits_{1}^{\infty}a_kb_k$, *причем имеет место формула*

$$\sum_{1}^{\infty}a_kb_k=\sum_{1}^{\infty}A_k(b_k-b_{k+1}). \tag{1}$$

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{1}^{\infty}M_k|b_k-b_{k+1}|$ и монотонности последовательности $\{M_k\}$ следует, что при $1<n<N$ справедливо неравенство $\sum\limits_{n}^{N}M_n|b_k-b_{k+1}|\geqslant M_n|b_n-b_{N+1}|$, из которого при $N\to\infty$ получаем $\sum\limits_{n}^{\infty}M_n|b_k-b_{k+1}|\geqslant M_n|b_n|$, откуда при $n\to\infty$ следует $M_n|b_n|\to 0$, т. е.

$$A_nb_n\to 0. \tag{2}$$

Легко видеть, что справедливо равенство $\sum\limits_{1}^{n}a_kb_k=\sum\limits_{1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_nb_n$, из которого при $n\to\infty$ в силу (2) получим (1), причем ряд в правой части этого равенства сходится абсолютно.

Доказательство теоремы 1. Полагая

$$A_n=\sum_{1}^{n}e^{ig(k)}, \tag{3}$$

можно получить оценку

$$|A_n|\leqslant\frac{c}{g(n+1)-g(n)}, \tag{4}$$

где c — некоторая положительная постоянная, не зависящая от n.

Поскольку из (3) следует тривиальная оценка $|A_n|\leqslant n$, то на основании свойства 4) функции $g(k)$ легко убедиться, что оценка (4) нетривиальна.

Оценка (4) может быть получена применением метода, используемого при доказательстве леммы Ван-дер-Корпута [1, с. 17]. Затем, учитывая оценку (4), применяем лемму данной заметки, что и завершает доказательство теоремы.

Пример. Дан ряд $\sum_1^\infty \frac{e^{ik^\alpha}}{k^\beta}$, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$. Применяя теорему 1, получаем, что он сходится при $\alpha+\beta>1$.

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x)$ *однозначна и дифференцируема на* $(1, +\infty)$. *Возьмем любую последовательность* $\{x_k\}$, *удовлетворяющую условиям* $x_{k+1}>x_k>1$, $x_n\to\infty$ *при* $n\to\infty$, $0<x_{k+1}-x_k<L$, $k=1, 2, 3, \ldots$, *где* L — *положительная постоянная, не зависящая от* k.

Если $f'(x)$ *суммируема на каждом интервале* $(a, b)\subset(1, +\infty)$ *и* $\int_a^{+\infty}|f'(x)|\,dx<+\infty$ *при* $a>1$, *то существует*

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_1^n (x_{k+1}-x_k)f(\xi_k)-\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x)\,dx\right] \tag{5}$$

при любом выборе чисел $\xi_k\in[x_k, x_{k+1}]$.

Доказательство. Имеем $\Delta(n)=\sum_1^n (x_{k+1}-x_k)f(\xi_k)-\int_{x_1}^{x_{n+1}} f(x)dx= =\sum_1^n u_k$, где $u_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}}dx\int_x^{\xi_k}f'(t)\,dt$. Отсюда

$$|u_k|\leqslant\int_{x_k}^{x_{k+1}}dx\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'(t)|\,dt=(x_{k+1}-x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'(t)|\,dt\leqslant L\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'(t)|\,dt.$$

Поскольку

$$\sum_1^\infty\int_{x_k}^{x_{k+1}}|f'(x)|\,dx=\int_{x_1}^\infty|f'(x)|\,dx<+\infty,$$

то ряд $\sum_1^\infty u_k$ сходится абсолютно, т. е. $\lim\Delta(n)$ существует.

Из доказанной теоремы следует, что бесконечный ряд $\sum_1^\infty (x_{k+1}-x_k)f(\xi_k)$ и несобственный интеграл $\int_{x_1}^\infty f(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся. Если дополнительно предположить, что $f(x)>0$ на $(0, +\infty)$ и $x_{k+1}-x_k\geqslant \geqslant l>0$, где l не зависит от k, то легко видеть, что ряд $\sum_1^\infty (x_{k+1}-x_k)\times \times f(\xi_k)$ сходится вместе с рядом $\sum_1^\infty f(\xi_k)$, так что ряд $\sum_1^\infty f(\xi_k)$ и интеграл $\int_{x_1}^\infty f(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Теорема 2 усиливает известный интегральный признак Коши, она может быть обобщена на кратные ряды, но по причине некоторой громоздкости обозначений мы не приводим здесь этих результатов.

2. В этом пункте рассматриваются некоторые ряды, связанные с итерационными процессами. Пусть на $[0,1)$ задана непрерывная положительная строго монотонная возрастающая функция $f(x)<x$, $x\neq 0$, $f(0)=0$. По-

ложим $x_1 \in (0,1)$ и $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Очевидно, что $x_{n+1} < x_n$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Пусть $\beta > 0$. Образуем ряд $\sum_1^\infty x_n^\beta$.

Теорема 3. *Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta_\varepsilon \in \in (0,1)$, что при всех $x \in [0, \delta_\varepsilon)$ $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$x - ax^p \leqslant f(x) \leqslant x - (a-\varepsilon)x^p,$$

где $a > 0$, $ap < 1$, $p > 1$. Тогда ряд $\sum_1^\infty x_n^\beta$ сходится при $\beta > p-1$ и расходится при $0 < \beta \leqslant p-1$.

Для доказательства этой теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть известно, что*

$$x_n - ax_n^p < x_{n+1} < x_n - a_1 x_n^p, \tag{6}$$

где $x_n \in (0,1)$, $0 < -ap < 1$, $0 < a_1 p < 1$, $p > 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Тогда можно указать такие независящие от n числа $A > B > 0$, для которых

$$B\frac{1}{n^\alpha} \leqslant x_n \leqslant \frac{A}{n^\alpha}, \tag{7}$$

где $\alpha = \frac{1}{p-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Доказательство. Положим $\varphi(x) = x - ax^p$, $\Phi(x) = x - a_1x^p$. Тогда $\varphi'(x) = 1 - apx^{p-1} > 0$, $\Phi'(x) = 1 - a_1px^{p-1} > 0$ для $x \in (0,1)$. Поэтому, предполагая, что (7) справедливо при некотором n, из (6) имеем:

$$\varphi\left(\frac{B}{n^\beta}\right) \leqslant x_{n+1} \leqslant \Phi\left(\frac{A}{n^\beta}\right). \tag{8}$$

Подберем $B > 0$ таким, чтобы

$$\frac{B}{(n+1)^\beta} \leqslant \varphi\left(\frac{B}{n^\beta}\right), \tag{9}$$

т. е. $\frac{B}{n^\alpha} - \frac{aB^p}{n^{\alpha p}} \geqslant \frac{B}{(n+1)^\alpha}$, откуда

$$B^{p-1} \leqslant \frac{1}{a}\left[n^{\alpha(p-1)} - \frac{n^{\alpha p}}{(n+1)^\alpha}\right] \tag{10}$$

или $B^{p-1} \leqslant \frac{1}{a}\left[n - \frac{n^{\alpha p}}{(n+1)^\alpha}\right]$, так как $\alpha = \frac{1}{p-1}$.

Рассмотрим функцию $\theta(x) = x - x^{p\alpha}(x+1)^{-\alpha}$. Имеем

$$\theta' = 1 - \frac{p\alpha x^{p\alpha-1}}{(x+1)^\alpha} + \frac{\alpha x^{p\alpha}}{(x+1)^{\alpha+1}} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\alpha+1}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} - \left(1+\frac{\alpha+1}{x}\right)\right].$$

Поскольку $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1} > 1 + \frac{\alpha+1}{x}$ при $x > 0$, то $\theta'(x) > 0$ при $x > 0$. Поэтому если (10) выполняется при некотором n, то оно будет справедливо и при замене n на $n+m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. В частности, если $B^{p-1} \leqslant \leqslant \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)$, то (10) будет справедливо и при $n \geqslant 1$.

Следовательно, B нужно брать таким, чтобы $0 < B \leqslant \left[\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\right]^{\alpha}$ $\left(\alpha=\frac{1}{p-1}\right)$. Аналогично будем подбирать A таким, чтобы $\Phi\left(\frac{A}{n^{\alpha}}\right) \leqslant \leqslant \frac{A}{(n+1)^{\alpha}}$.

Для этого нужно, чтобы

$$A^{p-1} \geqslant \frac{1}{a_1}\left[n-\frac{n^{p\alpha}}{(n+1)^{\alpha}}\right]. \tag{11}$$

Так как $\theta(x)$ — возрастающая ограниченная функция, то существует $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)$. Имеем $\theta(x)=x-x^{p\alpha}(1+x)^{-\alpha}=x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\right]=\alpha-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!x}+\ldots$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)=\alpha=\frac{1}{p-1}$. Итак, если $A \geqslant \left[\frac{1}{a_1}\frac{1}{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}$, то (11) справедливо при $n>1$. Следовательно, лемма доказана.

Для доказательства теоремы 3 достаточно учесть, что в силу леммы 2, если $x\in[0,\delta_\varepsilon)$, то $\frac{B^{\beta}}{n^{\alpha\beta}} \leqslant x_n^{\beta} \leqslant \frac{A^{\beta}}{n^{\alpha\beta}}$. Поэтому при $\beta>p-1$ ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} x_n^{\beta}$ сходится, так как сходится мажорантный ряд $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{A^{\beta}}{n^{\alpha\beta}}$. Если же $\beta \leqslant \leqslant p-1$, то ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} x_n^{\beta}$ расходится, поскольку расходится минорантный ряд $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{B^{\beta}}{n^{\alpha\beta}}$.

Так как может случиться, что $x_1 \overline{\in} [0,\delta_\varepsilon)$, то следует учесть, что $x_n\to 0$ при $n\to\infty$, так что, начиная с $n=n_0$, будем иметь $x_{n_0}\in[0,\delta_\varepsilon)$. Тогда лемму нужно применить к ряду $\sum\limits_{1}^{\infty}\xi_k^{\beta}$, где $\xi_1=x_{n_0}$, $\xi_{n+1}=f(\xi_n)$.

Примечание 1. Процесс образования ряда, указанный в лемме 2, более общий, чем тот итерационный процесс, о котором говорится в теореме, поскольку при заданном x_n можем выбирать x_{n+1} произвольно из интервала $(x_n-ax_n^p,\ x_n-a_1x_n^p)$.

Итерационные процессы такого типа можно рассматривать и в области аналитических функций, разложимых в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$.

Примечание 2. Примерами функций $f(x)$ теоремы 3 могут служить: 1) $\sin x$; 2) $\operatorname{arctg} x$; 3) $\ln(1+x)$; 4) $1-e^{-x}$ и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шнирельман Л. Г. Об аддитивных свойствах чисел.— Успехи мат. наук, 1939, вып. 6, с. 9—25

Киевский
политехнический институт

Поступила в редакцию
20.X.1977 г.