УДК 517.5

Н. А. Назаренко

О приближении плоских кривых параметрическими эрмитовыми сплайнами

Пусть задана упорядоченная последовательность точек P_k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $n \geqslant 3$; $P_n = P_0$; $|\overline{P_{k-1} P_k}| \leqslant 1$) своими координатами (x_k, y_k) относительно некоторой прямоугольной системы координат OXY. Предположим, что через эти точки последовательно проходит замкнутая кривая Γ, допускающая параметрическое представление

$$x = \varphi_1(t), \; y = \varphi_2(t) \; (0 \leqslant t \leqslant L), \tag{1}$$

где за параметр t берется длина куска ломаной l, вписанной в Γ с вершинами в точках P_k, причем

$$x_k = \varphi_1(t_k), \; y_k = \varphi_2(t_k) \;\; (k = 0, 1, 2, \ldots, n); \tag{2}$$

$$t_0 = 0, \; t_k = t_{k-1} + h_k, \; h_k = ((\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2)^{1/2} \;\; (k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \; \Delta y_k = y_k - y_{k-1}; \; t_n = L.$$

Построим параметрический кубический эрмитов сплайн S (см. [1])

$$x = S_x(t), \; y = S_y(t) \; (0 \leqslant t \leqslant L),$$

где $S_x(t)$ и $S_y(t)$ — кубические эрмитовы сплайны соответственно в плоскостях OtX и OtY. Сплайн S интерполирует кривую Γ в точках P_k, т. е.

$$S_x(t_k) = x_k, \; S_y(t_k) = y_k \; (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Поставим задачу оценки отклонения сплайна S от кривой Γ при условии, что функции $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2$) из (1) удовлетворяют условию Липшица степени α с константой 1:

$$|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')| \leqslant |t' - t''|^\alpha \quad \forall t', t'' \quad (0 < \alpha \leqslant 1). \tag{3}$$

В качестве меры уклонения возьмем величину

$$E(S, \Gamma) = \max E(S, \Gamma; t),$$

где $E(S, \Gamma; t) = ((S_x(t) - \varphi_1(t))^2 + (S_y(t) - \varphi_2(t))^2)^{1/2}$.

Фиксируем k и рассмотрим отклонение $E(S, \Gamma; t)$ при $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$. Без потери общности будем считать, что точка P_{k-1} совпадает с началом координат плоскости OXY, ибо в противном случае можно сделать параллельный перенос системы координат OXY, что не отразится на величине уклонения. В дальнейшем для краткости записи положим $t-t_{k-1}=\tau$.

Легко видеть, что параметрическое представление k-го звена ломаной l, вписанной в кривую Γ, следующее:

$$x=l_x(\tau)=\tau\cos\beta,\ y=l_y(\tau)=\tau\sin\beta\ \ (0\leqslant\tau\leqslant h_k),$$

где β — угол, образованный этим звеном с положительным направлением оси OX.

В силу неравенства треугольника имеем

$$E(S,\Gamma;\tau)\leqslant E(S,l;\tau)+E(l,\Gamma;\tau)\ \ (0\leqslant\tau\leqslant h_k). \tag{4}$$

Известно [1], что

$$E(S,l;\tau)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{h_k^2}\tau(h_k-\tau)^2, & 0\leqslant\tau\leqslant\dfrac{h_k}{2},\\ \dfrac{1}{h_k^2}\tau^2(h_k-\tau), & \dfrac{h_k}{2}\leqslant\tau\leqslant h_k.\end{cases} \tag{5}$$

Оценим величину

$$E(l,\Gamma;\tau)=[(l_x(\tau)-\varphi_1(\tau))^2+(l_y(\tau)-\varphi_2(\tau))^2]^{1/2}.$$

Так как функции $\varphi_i(\tau)$ $(i=1,2)$ удовлетворяют условию (3), то

$$\overline{\varphi}_i(\tau)\leqslant\varphi_i(\tau)\leqslant\overline{\overline{\varphi}}_i(\tau)\ \ (0\leqslant\tau\leqslant h_k),$$

где

$$\overline{\varphi}_1(\tau)=\begin{cases}-\tau^\alpha, & 0\leqslant\tau\leqslant\tau_1(\beta),\\ -(h_k-\tau)^\alpha+h_k\cos\beta, & \tau_1(\beta)\leqslant\tau\leqslant h_k,\end{cases}$$

$$\overline{\varphi}_2(\tau)=\begin{cases}-\tau^\alpha, & 0\leqslant\tau\leqslant\tau_2(\beta),\\ -(h_k-\tau)^\alpha+h_k\sin\beta, & \tau_2(\beta)\leqslant\tau\leqslant h_k,\end{cases}$$

$$\overline{\overline{\varphi}}_1(\tau)=\begin{cases}\tau^\alpha, & 0\leqslant\tau\leqslant h_k-\tau_1(\beta),\\ (h_k-\tau)^\alpha+h_k\cos\beta, & h_k-\tau_1(\beta)\leqslant\tau\leqslant h_k,\end{cases}$$

$$\overline{\overline{\varphi}}_2(\tau)=\begin{cases}\tau^\alpha, & 0\leqslant\tau\leqslant h_k-\tau_2(\beta),\\ (h_k-\tau)^\alpha+h_k\sin\beta, & h_k-\tau_2(\beta)\leqslant\tau\leqslant h_k.\end{cases}$$

Числа $\tau_1(\beta)$ и $\tau_2(\beta)$ являются корнями уравнений соответственно

$$\tau^\alpha-(h_k-\tau)^\alpha+h_k\cos\beta=0,\quad \tau^\alpha-(h_k-\tau)^\alpha+h_k\sin\beta=0.$$

Пусть $0\leqslant\beta\leqslant\pi/4$ и $0\leqslant\tau\leqslant h_k/2$. Тогда $\tau_1(\beta)\leqslant\tau_2(\beta)$ и

$$E(l,\Gamma;\tau)\leqslant\begin{cases}g_1(\tau,\beta), & 0\leqslant\tau\leqslant\tau_1(\beta),\\ g_2(\tau,\beta), & \tau_1(\beta)\leqslant\tau\leqslant\tau_2(\beta),\\ g_3(\tau,\beta), & \tau_2(\beta)\leqslant\tau\leqslant\dfrac{h_k}{2},\end{cases} \tag{6}$$

где $g_1(\tau,\beta)=\tau((\tau^{\alpha-1}+\cos\beta)^2+(\tau^{\alpha-1}+\sin\beta)^2)^{1/2}$, $g_2(\tau,\beta)=(((h_k-\tau)^\alpha-(h_k-\tau)\cos\beta)^2+(\tau^\alpha+\tau\sin\beta)^2)^{1/2}$, $g_3(\tau,\beta)=(h_k-\tau)(((h_k-\tau)^{\alpha-1}-\cos\beta)^2+((h_k-\tau)^{\alpha-1}-\sin\beta)^2)^{1/2}$. Подставляя (5) и (6) в (4), получаем

$$E(S,\Gamma;\tau)\leqslant F(\tau,\beta),$$

где

$$F(\tau, \beta) = \begin{cases} f_1(\tau, \beta), & 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1(\beta), \\ f_2(\tau, \beta), & \tau_1(\beta) \leqslant \tau \leqslant \tau_2(\beta), \\ f_3(\tau, \beta), & \tau_2(\beta) \leqslant \tau \leqslant \frac{h_k}{2}, \end{cases}$$

а

$$f_s(\tau, \beta) = \frac{1}{h_k^2}\tau(h_k - \tau)^2 + g_s(\tau, \beta) \quad (s = 1, 2, 3).$$

Исследуя на экстремум функцию $F(\tau, \beta)$ обычными методами, имеем

$$\max_{0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{4}} \max_{0 \leqslant \tau \leqslant \frac{h_k}{2}} F(\tau, \beta) = \frac{1}{8}h_k + \left(2\left(\frac{h_k}{2}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{h_k}{2}\right)^{\alpha} h_k + \frac{h_k^2}{4}\right)^{1/2}. \qquad (7)$$

В случае, когда $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{4}$ и $\frac{h_k}{2} \leqslant \tau \leqslant h_k$, аналогичные рассуждения дают тот же результат.

Если же $\frac{j\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant \frac{(j+1)\pi}{4}$ $(j = 1, 2, \ldots, 7)$, то с помощью соответствующего поворота осей координат плоскости OXY, что не отразится на величине уклонения, приходим к рассмотренному выше случаю.

Таким образом, доказано, что

$$E(S, \Gamma) \leqslant \frac{1}{8}h + \left(2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha} h + \frac{h^2}{4}\right)^{1/2},$$

где $h = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant h} h_k$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(P, \alpha)$ класс плоских замкнутых кривых Γ, проходящих через систему точек $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ $(n \geqslant 3;\ P_n = P_0;$ $|\overline{P_{k-1}P_k}| \leqslant 1)$ и допускающих параметрическое представление (1), где функции φ_i $(i = 1, 2)$ удовлетворяют условиям (2) и (3).

Из предыдущих рассуждений следует, что

$$\sup_{\Gamma \in \mathfrak{M}(P, \alpha)} E(S, \Gamma) \leqslant \frac{1}{8}h + \left(2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha} h + \frac{h^2}{4}\right)^{1/2},$$

где верхняя грань берется по всем кривым Γ из $\mathfrak{M}(P, \alpha)$ при всевозможных системах точек P.

В частности, при $\alpha = 1$ имеем

$$\sup_{\Gamma \in \mathfrak{M}(P, 1)} E(S, \Gamma) \leqslant \frac{5}{8}h. \qquad (8)$$

Для величины $\sup\limits_{\Gamma \in \mathfrak{M}(P, \alpha)} E(S, \Gamma)$ получим оценку снизу, из которой, в частности, будет следовать. что оценка (8) — неулучшаемая, если рассматривать всевозможные системы точек P и соответствующие им классы $\mathfrak{M}(P, 1)$.

Через $\mathfrak{M}(\widetilde{P}, \alpha)$ обозначим класс кривых Γ, соответствующий системе точек $\widetilde{P} = \{\widetilde{P}_0, \widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_n\}$, в которой координаты точек $\widetilde{P}_{k-2}$, $\widetilde{P}_{k-1}$, $\widetilde{P}_k$, $\widetilde{P}_{k+1}$ (k фиксировано) удовлетворяют равенствам

$$\Delta x_{k-1} = \Delta y_k = \Delta x_{k+1} = 0, \quad \Delta y_{k-1} = \Delta x_k = -\Delta y_{k+1} = h.$$

Рассмотрим кривую $\Gamma_0(\alpha) \in \mathfrak{M}(\widetilde{P}, \alpha)$, имеющую на k-м участке параметрическое представление

$$x = \widetilde{\varphi}_1(\tau), \quad y = \widetilde{\varphi}_2(\tau) \quad (0 \leqslant \tau \leqslant h), \tag{9}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_1(\tau) = \begin{cases} -\tau^\alpha, & 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1(0), \\ -(h-\tau)^\alpha + h, & \tau_1(0) \leqslant \tau \leqslant h, \end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}_2(\tau) = \begin{cases} -\tau^\alpha, & 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_2(0), \\ -(h-\tau)^\alpha, & \tau_2(0) \leqslant \tau \leqslant h. \end{cases}$$

Имеем

$$\sup_{\Gamma \in \mathfrak{M}(\widetilde{P}, \alpha)} E(S, \Gamma) \geqslant E(S, \Gamma_0) \geqslant E\left(S, \Gamma_0; \frac{h}{2}\right) =$$

$$= \left(2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\alpha} - \frac{3}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha} h + \frac{17}{64} h^2\right)^{1/2}.$$

Отметим, что при $\alpha = 1$ $E\left(S, \Gamma_0; \frac{h}{2}\right) = \frac{5}{8} h$, откуда и следует неулучшаемость (8).

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1. *Какова бы ни была система точек* $P = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\}$ $(n \geqslant 3;\ P_n = P_0;\ |\overline{P_{k-1}P_k}| \leqslant 1)$, *погрешность* $E(S, \Gamma)$ *приближения кривой* $\Gamma \in \mathfrak{M}(P, \alpha)$ *параметрическим эрмитовым кубическим сплайном* S *допускает оценку*

$$E(S, \Gamma) \leqslant \frac{1}{8} h + \left(2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha} h + \frac{h^2}{4}\right)^{1/2} \quad (h = \max_{1 \leqslant k \leqslant h} h_k).$$

Существует система точек $\widetilde{P}$ *и кривая* $\Gamma_0(\alpha) \in \mathfrak{M}(\widetilde{P}, \alpha)$ *такие, что*

$$E(S, \Gamma_0) \geqslant \left(2\left(\frac{h}{2}\right)^{2\alpha} - \frac{3}{4}\left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha} h + \frac{17}{64} h^2\right)^{1/2}.$$

При $\alpha = 1$ *для любой кривой* $\Gamma \in \mathfrak{M}(P, 1)$

$$E(S, \Gamma) \leqslant \frac{5}{8} h,$$

причем эта оценка неулучшаемая на всем множестве классов $\mathfrak{M}(P, 1)$, *соответствующих произвольным системам точек* P.

Для измерения расстояния между кривыми на плоскости часто используют метрику Хаусдорфа. Напомним (см., например, [2]), что хаусдорфовым расстоянием между двумя замкнутыми ограниченными множествами A и B метрического пространства X с метрикой ρ называется число

$$r(A, B) = \max\{\max_{M \in A} \min_{N \in B} \rho(M, N); \quad \max_{M \in B} \min_{N \in A} \rho(M, N)\}.$$

Считаем, что $\rho(M, N)$ — евклидово расстояние между точками M и N.

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$\sup_{\Gamma \in \mathfrak{M}(P, 1)} r(S, \Gamma) = \frac{5}{8} h,$$

где $h = \max_{1 \leqslant k \leqslant h} h_k$.

Доказательство. Для любой кривой $\Gamma \in \mathfrak{M}(P, 1)$

$$r(S, \Gamma) \leqslant E(S, \Gamma \leqslant \frac{5}{8} h,$$

поэтому

$$\sup_{\Gamma\in\mathfrak{M}(P,1)} r(S,\Gamma) \leqslant \frac{5}{8}h. \qquad (10)$$

Рассмотрим систему точек $\widetilde{P}$ и кривую $\Gamma_0(1)\in\mathfrak{M}(\widetilde{P},1)$, имеющую на k-м звене параметрическое представление (9).

Легко видеть, что $r(S,\Gamma_0)=\frac{5}{8}h$, а это вместе с (10) доказывает теорему 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаренко Н. А. Параметрические эрмитовы сплайны в задачах восстановления и сглаживания. Препринт Ин-та математики АН УССР 77-20, К., 1977.— 13 с.
2. Сендов Бл. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике.— Успехи мат. наук, 1969, **24**, № 5, с. 141—178.
3. Великин В. Л. О наилучшем приближении сплайн-функциями на классах непрерывных функций.— Мат. заметки, 1970, **8**, № 1, с. 41—46.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
27.IV.1978 г.