УДК 519.21

Д. Алимов

О достижении фиксированного уровня одним классом немарковских траекторий

1. Пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots$ — две последовательности независимых в совокупности неотрицательных случайных величин с распределениями

$$P\{\zeta_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}(1 + \lambda x),\ P\{\eta_n < x\} = G(x)\ \ (x > 0;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Для каждого $t \geqslant 0$ положим

$$\nu_t = \begin{cases} 0, & \text{если } \zeta_1 > t, \\ \sup(k : \zeta_1 + \ldots + \zeta_k \leqslant t), & \text{если } \zeta_1 \leqslant t, \end{cases}$$

$$x_t = \begin{cases} t, & \text{если } \nu_t = 0, \\ t - \sum\limits_{k=1}^{\nu_t} \eta_k, & \text{если } \nu_t > 0. \end{cases}$$

Нас интересует случайный процесс

$$\tau_z = \begin{cases} \inf\{t : x_t = z\}, & \text{если } \sup\limits_{t \geqslant 0} x_t \geqslant z, \\ +\infty, & \text{если } \sup\limits_{t \geqslant 0} x_t < z \end{cases} \quad (z \geqslant 0).$$

Случайный процесс x_t, $t \geqslant 0$, не марковский. Однако его можно рассматривать как компоненту двумерного марковского процесса, в котором дополнительная компонента принимает два значения (например, 1 и 2). Покажем это.

Случайную величину ζ_n при любом n можно представить в виде суммы $\zeta_n = \xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)}$, где $\xi_n^{(1)}$ и $\xi_n^{(2)}$ независимы и имеют показательные распределения с одним и тем же параметром λ. Положим

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t - \zeta_1 - \ldots - \zeta_{\nu_t} < \xi^{(1)}_{1+\nu_t}, \\ 2, & \text{если } t - \zeta_1 - \ldots - \zeta_{\nu_t} \geqslant \xi^{(1)}_{1+\nu_t}. \end{cases}$$

Случайный процесс (y_t, x_t), $t \geqslant 0$, — однородный марковский процесс, в котором первая компонента y_t, $t \geqslant 0$, связана в однородную цепь Маркова:

$$P\{y_{t+\varepsilon} = 3 - j / y_t = j\} = \lambda\varepsilon + o(\varepsilon),\ j = 1, 2. \tag{2}$$

Если $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$ — переходные вероятности цепи y_t, то из (2) следует

$$p_{11}(t) = p_{22}(t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda t}),\ p_{12}(t) = p_{21}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda t}).$$

На интервалах постоянства цепи y_t процесс x_t линейно растет с угловым коэффициентом 1. Скачки этого процесса происходят тогда и только тогда, когда цепь y_t переходит из состояния 2 в состояние 1. Все эти скачки независимы и имеют одну и ту же функцию распределения $G(x)$. Поэтому (см. [1]) марковский процесс (y_t, x_t) однороден по второй компоненте:

$$P\{y_{s+t}=j,\ x_{s+t}\geqslant u+v/y_s=i,\ x_s=u\}\equiv P\{y_t=j,\\ x_t\geqslant v/y_0=i,\ x_0=0\}\ (i,j=1,2;\ u,v,t,s\geqslant 0).$$

Положим

$$M(e^{iz(x_t-x_0)}, y_t=j/y_0=k)=\varphi_{kj}(t,z)\ (k,\ j=1,2;\quad t\geqslant 0, -\infty<z<+\infty.$$

Имеем

$$\varphi_{1j}(t+\varepsilon, z)=(1+(iz-\lambda)\varepsilon)\varphi_{1j}(t,z)+\lambda\varepsilon\varphi_{2j}(t,z)+o(\varepsilon),\ j=1,2,$$

и если $\int\limits_0^\infty e^{-izx}dG(x)=g(z)$, то $\varphi_{2j}(t+\varepsilon, z)=(1+(iz-\lambda)\varepsilon)\varphi_{2j}(t,z)+$ $+\lambda\varepsilon g(z)\varphi_{1j}(t,z)+o(\varepsilon)$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_{1j}(t,z)}{\partial t}&=(iz-\lambda)\varphi_{1j}(t,z)+\lambda\varphi_{2j}(t,z),\\ \frac{\partial\varphi_{2j}(t,z)}{\partial t}&=\lambda g(z)\varphi_{1j}(t,z)+(iz-\lambda)\varphi_{2j}(t,z).\end{aligned}\tag{3}$$

Если $(\varphi_{ij}(t,z),\ i,j=1,2)=\Phi(t,z)$,

$$\begin{pmatrix}iz-\lambda & \lambda\\ \lambda g(z) & iz-\lambda\end{pmatrix}=Q(z),$$

то из (3) следует (с учетом $\Phi(0,z)=(\delta_{ij};\ i,j=1,2))$ $\Phi(t,z)=e^{tQ(z)}$.

2. Если $\tau_z<\infty$, то по определению $\varkappa_z=y_{\tau_z}$, $z\geqslant 0$. Для $\tau_z=\infty$ $\varkappa_z$ остается неопределенной. Из результатов, изложенных в [2], следует, что $(\varkappa_z, \tau_z)$, $z\geqslant 0$, — однородный марковский процесс, однородный по второй компоненте. Этот процесс, вообще говоря, обобщенный в том смысле, что $P\{\tau_z<\infty\}\leqslant 1$. Положим

$$M(e^{-s\tau_z};\quad \tau_z<\infty,\ \varkappa_z=j/\varkappa_0=i)=\psi_{ij}(z,s)\quad (s\geqslant 0).$$

Тогда (см. [1])

$$\Psi(z,s)=(\psi_{ij}(z,s);\quad i,j=1,2)=e^{zX(s)},\tag{4}$$

где матрица

$$X(s)=\begin{pmatrix}x_{11}(s) & x_{12}(s)\\ x_{21}(s) & x_{22}(s)\end{pmatrix}$$

подлежит определению.

Из определения процесса $(\varkappa_z, \tau_z)$ следуют равенства

$$\psi_{1j}(z+\varepsilon, s)=(1-(\lambda+s)\varepsilon)\psi_{1j}(z,s)+\lambda\varepsilon\psi_{2j}(z,s)+o(\varepsilon),$$

$$\psi_{2j}(z+\varepsilon, s)=(1-(\lambda+s)\varepsilon)\psi_{2j}(z,s)+\lambda\varepsilon\int\limits_0^\infty\psi_{1j}(z+x,s)\,dG(x)+o(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_{1j}(z,s)}{\partial z}&=-(\lambda+s)\psi_{1j}(z,s)+\lambda\psi_{2j}(z,s),\\ \frac{\partial\psi_{2j}(z,s)}{\partial z}&=\lambda\int\limits_0^\infty\psi_{1j}(z+x,s)\,dG(x)-(\lambda+s)\psi_{2j}(z,s),\ j=1,2.\end{aligned}\tag{5}$$

Введем матрицы

$$A(s) = \begin{pmatrix} -(\lambda + s) & \lambda \\ 0 & -(\lambda + s) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (5)

$$\frac{\partial \Psi(z, s)}{\partial z} = A(s)\,\Psi(z, s) + B \int_0^\infty \Psi(z + x, s)\, dG(x).$$

Но (см. (4))

$$\frac{\partial \Psi(z, s)}{\partial z} = e^{zX} X = X e^{zX},$$

поэтому

$$X = A(s) + B \int_0^\infty e^{xX} dG(x). \tag{6}$$

Это трансцендентное матричное уравнение определяет неизвестную матрицу $X = X(s)$. Для его решения удобнее обратиться непосредственно к системе уравнений (5).

3. Согласно (4)

$$\frac{\partial \Psi(z, s)}{\partial z} = X(s)\,\Psi(z, s) = \Psi(z, s)\,X(s).$$

Поэтому функции $\psi_{1j}(z, s)$ и $\psi_{2j}(z, s)$ при фиксированных j и s удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Если $c_{1j}e^{-\omega z}$, $c_{2j}e^{-\omega z}$ — частное решение этой системы, то, используя (5), имеем

$$-\omega c_{1j} = -(\lambda + s)\,c_{1j} + \lambda c_{2j}, \quad -\omega c_{2j} = (\lambda + s)\,c_{2j} + \lambda c_{1j} \int_0^\infty e^{-x\omega} dG(x).$$

Для совместности этой системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \lambda + s - \omega & -\lambda \\ -\lambda \tilde{g}(\omega) & \lambda + s - \omega \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\tilde{g}(\omega) = \int_0^\infty e^{-x\omega} dG(x) \right)$$

или

$$(\lambda + s - \omega)^2 = \lambda^2 \tilde{g}(\omega). \tag{7}$$

Так как $|\psi_{ij}(z, s)| \leqslant 1$ $(z, s \geqslant 0)$, то нас интересуют лишь ω, лежащие в правой полуплоскости: $\operatorname{Re}\omega \geqslant 0$. Если $\operatorname{Re}\omega = 0$, то $(s > 0)$

$$|\lambda + s - \omega|^2 \geqslant (\lambda + s)^2 > \lambda^2 |\tilde{g}(\omega)|,$$

ибо $|\tilde{g}(\omega)| \leqslant 1$. Поэтому согласно теореме Руше [3] уравнение (7) имеет столько же корней в полуплоскости $\operatorname{Re}\omega \geqslant 0$, сколько и его левая часть $(\lambda + s - \omega)^2 = 0$. Последнее уравнение имеет один двукратный корень $\omega = \lambda + s$ из указанной полуплоскости. Следовательно, существуют два корня ω_1 и ω_2 в $\operatorname{Re}\omega \geqslant 0$, удовлетворяющие (7). Покажем, что оба они положительны. Имеем $(0 < \omega < \infty)$

$$\lambda + s - \omega = \lambda \sqrt{\tilde{g}(\omega)}, \quad \lambda + s - \omega = -\lambda \sqrt{\tilde{g}(\omega)}. \tag{8}$$

При $\omega \to +\infty$ $\tilde{g}(\omega) \to 0$. Поэтому согласно теореме Коши об обращении непрерывной функции в 0 каждое из написанных уравнений имеет по корню на $(0, +\infty)$. Это и будут корни ω_1 и ω_2, установленные выше с помощью теоремы Руше.

4. Используя верхние уравнения в (5), получаем следующее соотношение между c_{1j} и c_{2j}: $(\lambda + s - \omega)\, c_{1j} = \lambda c_{2j}$. Поэтому положив $c_{1j} = \lambda$, $c_{2j} = \lambda + s - \omega$, приходим к двум частным решениям (5)

$$\lambda e^{-\omega_1 z},\ (\lambda + s - \omega_1)\, e^{-\omega_1 z} \text{ и } \lambda e^{-\omega_2 z},\ (\lambda + s - \omega_2)\, e^{-\omega_2 z}.$$

Общее решение — их линейная комбинация

$$\psi_{1j}(z, s) = \lambda c_1 e^{-\omega_1 z} + \lambda c_2 e^{-\omega_2 z},\ \psi_{2j}(z, s) = = (\lambda + s - \omega_1)\, c_1 e^{-\omega_1 z} + (\lambda + s - \omega_2)\, c_2 e^{-\omega_2 z}. \tag{9}$$

Так как $\psi_{ij}(0, s) = \delta_{ij}$, то

$$\lambda c_1 + \lambda c_2 = \delta_{1j},\ (\lambda + s - \omega_1)\, c_1 + (\lambda + s - \omega_2)\, c_2 = \delta_{2j}.$$

Если $j = 2$, то $c_1 + c_2 = 0$, $\omega_1 c_1 + \omega_2 c_2 = -1$ и

$$c_1 = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}, \quad c_2 = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2},$$

так что

$$\begin{gathered}\psi_{12}(z, s) = \frac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1}\,(e^{-\omega_1 z} - e^{-\omega_2 z}),\\ \psi_{22}(z, s) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\,[(\lambda + s - \omega_1)\, e^{-\omega_1 z} - (\lambda + s - \omega_2)\, e^{-\omega_2 z}].\end{gathered} \tag{10}$$

Аналогично

$$\begin{gathered}\psi_{11}(z, s) = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2}\,[(\lambda + s - \omega_1)\, e^{-\omega_1 z} - (\lambda + s - \omega_2)\, e^{-\omega_2 z}],\\ \psi_{21}(z, s) = \frac{(\lambda + s - \omega_1)(\lambda + s - \omega_2)}{\lambda(\omega_1 - \omega_2)}\,(e^{\omega_1 z} - e^{\omega_2 z}).\end{gathered} \tag{11}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема.

$$M(e^{-s\tau_z},\ \tau_z < \infty) = \varphi_{11}(z, s) + \varphi_{12}(z, s),$$

где слагаемые в правой части определяются равенствами (10), (11), ω_1 *и* ω_2 — *положительные корни уравнения* (7). *Это уравнение всегда имеет ровно два корня в полуплоскости* $\mathrm{Re}\,\omega \geqslant 0$. *Оба они расположены на прямой* $\mathrm{Im}\,\omega = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ежов И. И., Скороход А. В. Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I.— Теория вероятностей и ее применения, 1969, **14**, вып. 1, с. 3—14.
2. Ежов И. И. Цепи Маркова, однородные по второй компоненте, и их приложение к задаче о времени первого выхода за данный уровень.—В кн.: Шестая летняя математическая школа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970, с. 295—311.
3. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1967.— 444 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
20.III.1978 г.