УДК 517.9

Ю. В. Теплинский

К вопросу о приводимости счетных систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами

В данной заметке при помощи метода построения итераций с ускоренной сходимостью (см. [1]) рассматривается вопрос о приводимости счетной системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(\varphi)x, \ \frac{d\varphi}{dt} = \omega \tag{1}$$

к системе уравнений вида

$$\frac{dy}{dt} = A_0 y, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \tag{2}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, A и A_0 — постоянные действительные диагональные матрицы, $P(\varphi)$ — 2π-периодическая по φ_i $(i = \overline{1, m})$ бесконечная матрица.

Обозначим через M пространство вектор-функций $z(t) = \{z_1(t), \ldots\}$, таких, что $\sup\limits_{i,t\in T}\{|z_i(t)|\} < \infty$, $\sup\limits_{i,t\in T}\left\{\left|\frac{dz_i(t)}{dt}\right|\right\} < \infty$ на некотором промежутке времени T (конечном или бесконечном).

Вектор-функцию $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots\}$ назовем решением системы уравнений (1), если при подстановке в эту систему она превращает ее в систему тождеств и если $x(t) \in M$.

Очевидно, не всякая вектор-функция $y(t)$, тождественно удовлетворяющая системе (2), будет в этом смысле ее решением. Действительно, пусть $A_0 = \mathrm{diag}\{1, 2, 4, 8, \ldots\}$. Тогда вектор-функция вида

$$y_1\left(-10, e^{-10}, \frac{1}{4}e^{-20}, \frac{1}{16}e^{-40}, \ldots, t\right) = e^t,$$

$$y_2\left(-10, e^{-10}, \frac{1}{4}e^{-20}, \frac{1}{16}e^{-40}, \ldots, t\right) = \frac{1}{4}e^{2t},$$

$$y_3\left(-10, e^{-10}, \frac{1}{4}e^{-20}, \frac{1}{16}e^{-40}, \ldots, t\right) = \frac{1}{16}e^{4t},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

удовлетворяет системе уравнений (2) при всех t, но, например, при $t = 2$ эта функция выходит из рассматриваемого пространства M. Однако рассмотренная вектор-функция — решение системы уравнений (2) при $t \in (-\infty, 0]$.

Будем говорить, что матрица $\Phi(\varphi)$ осуществляет замену переменных

$$x = \Phi(\varphi)\, y, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0, \tag{3}$$

приводящую систему уравнений (1) к виду (2), если всякое решение $x(t)$ системы (1) можно представить в виде (3), где $y(t)$ — решение системы уравнений (2). Справедлива следующая теорема, уточняющая результаты из [2, 3].

Теорема. *Пусть правые части системы дифференциальных уравнений* (1) *удовлеворяют условиям*:

1) *матрица* $P(\varphi)$ — 2π-*периодическая по* φ_i $(i = \overline{1, m})$, *аналитическая по* φ *в области* $|\operatorname{Im} \varphi| < \rho$, *действительная при действительных* φ;

2) *диагональная матрица* A *такова, что* $\inf\limits_{i \neq j} |a_i - a_j| \geqslant r > 0$;

3) $\| P(\varphi) \| = \sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} | p_{ij}(\varphi) |_0 \leqslant M < \infty$, *где* $| p_{ij}(\varphi) |_0 = \max\limits_{\varphi} | p_{ij}(\varphi) |$;

4) *существуют такие* $\varepsilon > 0$ *и* $d > 1$, *что при всех* $|k| \neq 0$ *справедлива оценка*

$$|(k, \omega)| \geqslant \varepsilon |k|^{-d},$$

где $k = (k_1, \ldots, k_m)$ — *целочисленный вектор*, $(k, \omega) = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i \omega_i$.

Тогда можно указать достаточно малую константу $M_0 > 0$ *такую, что при* $\| P(\varphi) \| \leqslant M_0$ *система уравнений* (1) *допускает замену переменных вида* (3), *приводящую ее к виду* (2), *где* $\Phi(\varphi)$ — *аналитическая в области* $|\operatorname{Im} \varphi| \leqslant \frac{\rho}{2}$, *действительная при действительных* φ, 2π-*периодическая по* φ_i $(i = \overline{1, m})$ *бесконечная матрица*.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2 из [2] с использованием метода ускоренной сходимости. При этом следует принять во внимание введенное выше понятие решения системы уравнений (1), а также норму, введенную для матрицы $P(\varphi)$.

Отметим, что если все элементы a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ диагональной матрицы A одного знака, то, выбирая M_0 достаточно малым, можно добиться выполнения этого условия и для элементов a_i^0 $(i = 1, 2, \ldots)$ диагональной матрицы A_0. Тогда исходная система выделяет в пространстве m ограниченных числовых последовательностей подмножество $m_A \subset m$ точек $y = (y_1, y_2, \ldots)$ таких, что $\sup\limits_i \{| y_i | | a_i^0 |\} < \infty$. (Напомним, что $\sup\limits_i \{| a_i^0 |\}$, вообще говоря, бесконечен.) Легко заметить, что если $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то для всех $t_0 \in R$ и $x_0 \in m_A$ существует единственное решение системы уравнений (1) с начальными значениями t_0, x_0, принадлежащее пространству M при $t \leqslant t_0$, если $t_0 > 0$, и при $t \leqslant 0$, если $t_0 < 0$. Кроме того, для системы уравнений (1) множество m_A отрицательно полуинвариантно. Если среди a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ имеется конечное число отрицательных, а остальные положительны, то решение с начальными условиями t_0, x_0 принадлежит M на любом конечном отрезке времени $[T, t_0]$, где $T < t_0$, т. е. множество m_A — в этом случае отрицательно локально полуинвариантно для системы уравнений (1).

Проведенные рассуждения очевидным образом проводятся для случая отрицательных элементов матрицы A.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1969.— 245.
2. Теплинский Ю. В. О приводимости линейной счетной системы дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.— В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем, Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 172—181.
3. Теплинский Ю. В. О приводимости счетных систем дифференциальных уравнений.— Мат. физика, 1977, вып. 22, с. 47—54.

Каменец-Подольский
педагогический институт

Поступила в редакцию
28.XII.1977 г.