УДК 517

Ю. Ю. Трохимчук

О дифференциальных свойствах действительных и комплексных функций

В статье [1] рассмотрены критерии различных «гладкостей» действительных функций одного переменного в терминах отдельных производных чисел. Здесь приведем подобный критерий также и для функций многих переменных. Докажем также теорему относительно липшицевости аналитической функции в замкнутой области; любопытно отметить, что доказательство этой теоремы основано на топологических соображениях.

Сначала вернемся еще к функциям одного переменного и введем одно, как нам кажется, полезное понятие.

1. D-дифференциал. Пусть конечная функция $f(x)$ определена на интервале (a, b). Скажем, что в точке x у нее определен D-дифференциал («дискретный» дифференциал), если существует множество $Q \subset (a, b)$, имеющее точку x в качестве *двусторонней* предельной точки и такое, что

$$f(x') - f(x) = C(x' - x) + o(x' - x), \quad x' \in Q$$

(C — постоянная); при этом форма $C(x' - x) = Cdx = Df(x)$ называется D-дифференциалом.

Обычный и асимптотический дифференциалы, конечно, являются и D-дифференциалами. Но если первые (при их существовании) определены однозначно, то это уже неверно для D-дифференциала; например, если график функции $f(x)$ в точке x имеет контингенцию — полную плоскость, то легко видеть, что при любом C у нее существует D-дифференциал, равный Cdx.

С другой стороны, нетрудно строить примеры, для которых D-дифференциал не существует: взять хотя бы функцию $y = |x|$ (угловая точка). Несмотря на некоторую аналогию между определениями одностороннего производного числа и D-дифференциала, между ними возникают и определенные различия. Например, вопрос об однозначной определенности D-дифференциала у функции в некоторой точке. Одностороннее производное число в точке определено однозначно лишь в том случае, когда функция имеет одностороннюю *производную*. Ясно, что если функция имеет в точке обычную (двустороннюю) производную, то D-дифференциал определен однозначно (и совпадает с обычным). Приведем более интересный пример. Пусть график $B(f)$ функции $f(x)$ в точке x имеет контингенцию — полуплоскость с наклонной граничной прямой; легко видеть, что эта граничная прямая — геометрическая интерпретация единственного возможного D-дифференциала функции $f(x)$ в точке x.

Сформулируем теорему существования, аналогичную таковой для производных чисел и легко вытекающую из теоремы о контингенциях (см. [1]).

Теорема 1. *Произвольная конечная функция $f(x)$, $x \in (a, b)$, почти всюду на (a, b) обладает D-дифференциалом.*

Ясно, что ранее доказанные теоремы о производных числах останутся справедливыми, если заменить их D-дифференциалами.

Приведем вызывающую интерес теорему, характерную именно для D-дифференциала.

Теорема Ролля. *Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ обладает некоторым D-дифференциалом в каждой точке интервала (a, b). Тогда, если $f(a) = f(b)$, то найдется точка $c \in (a, b)$, в которой $Df = 0$, причем в этой точке D-дифференциал определен однозначно.*

Доказательство. Либо максимум, либо минимум функции достигается для некоторой внутренней точки $c \in (a, b)$; пусть — максимум. Горизонтальная прямая $y = f(c)$ отсекает весь график $B(f)$ функции $f(x)$ от верхней полуплоскости. Простые геометрические соображения показывают, что $Df(c) = 0$ и что другого D-дифференциала здесь у функции нет.

Конечно, отсюда, как и обычно, следует аналог теоремы Лагранжа, а из нее, в свою очередь, новые доказательства частных случаев приведенных выше теорем и их следствий о монотонности, постоянстве и т. д.

2. Действительные функции многих переменных. *Производные числа по направлению.* В связи с изложенным выше кажется естественным следующее определение.

Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$—конечная функция в области $G \subset \mathbf{R}^n$ и l— некоторый луч, выходящий из точки $x \in G$. Скажем, что d, $-\infty \leqslant d \leqslant +\infty$, — производное число функции $f(x)$ в точке x по направлению l, если существует последовательность точек $x_k \in l$ $(k = 1, 2, \ldots)$ таких, что $x_k \to x$ и $\dfrac{f(x_k) - f(x)}{|x_k - x|} \to d$.

В дальнейшем достаточно будет и более общей ситуации, а именно, в приведенном определении будем брать точки x_k, не обязательно принадлежащие l, но потребуем, чтобы l была полукасательной для последовательности $\{x_k\}$ в точке x; при этом всегда можно считать, что l — *единственная* такая полукасательная.

Далее, рассмотрим определенный репер $r(x)$ в точке x, т. е. совокупность n линейно независимых лучей $l_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, выходящих из этой точки. Совокупность $d(x) = \{d_i(x)\}$ некоторых производных чисел $d_i(x)$ функции $f(x)$ по всем направлениям $l_i(x)$ в точке x естественно назвать производными числами вдоль репера $r(x)$; это понятие—очевидный аналог одностороннего производного числа для случая функции одного переменного.

Наконец, скажем, что семейство реперов $\{r(x)\}$, $x \in G$, образует постоянное поле, если каждый из них получается параллельным переносом любого другого.

Докажем теорему.

Теорема 2. *Пусть в выпуклой области $G \subset \mathbf{R}^n$ заданы непрерывная функция $f(x)$ и некоторое постоянное поле реперов $\{r(x)\}$. Если в каждой точке $x \in G$ функция $f(x)$ обладает ограниченными производными числами $d(x) = \{d_i(x)\}$ вдоль репера $r(x)$:*

$$|d_i(x)| \leqslant L \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то $f(x)$ удовлетворяет в G условию Липшица:

$$|f(x') - f(x)| \leqslant K|x' - x| \quad \forall x', x \in G.$$

Доказательство. Выберем какой-либо из реперов $r(x)$ в качестве базы новой системы координат и покажем, что вдоль каждой координатной прямой $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L.

Берем одну из таких прямых l и на ней — произвольные точки x_1, x_2, принадлежащие (выпуклой) области G; пусть направление вектора $\overrightarrow{x_1x_2}$ совпадает с положительным направлением на соответствующей оси координат.

Пусть ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{L + \sqrt{L^2+4}}$, произвольно; обозначим через $Q(x, \varepsilon) = Q(x)$ конус с вершиной x из отрезка $[x_1, x_2]$ прямой l с осью, направленной в положительную сторону l, и углом между осью и образующей, равным ε. Производное число $d_l(x)$ вдоль l кратко запишем $d(x)$.

Так как $|d(x_1)| \leqslant L$, то найдется такое $\tilde{x} \in Q(x_1, \varepsilon)$ что

$$|f(\tilde{x}) - f(x_1)| \leqslant (L + 2\varepsilon)|\tilde{x} - x_1|. \tag{1}$$

Пусть R — точная верхняя грань множества всех чисел $|\tilde{x} - x_1|$ таких, что для $\tilde{x}$ справедливо неравенство (1); из непрерывности $f(x)$ следует, что на части сферы радиуса R, лежащей внутри конуса $Q(x_1, \varepsilon)$, *найдется точка*, для которой это неравенство также имеет место (это важно в конце доказательства теоремы).

Покажем, что $R = |x_2 - x_1|$. Предположим, что $R < |x_2 - x_1|$; снова обозначим через $\tilde{x}$ точку конуса $Q(x_1, \varepsilon)$, для которой $|\tilde{x} - x_1| = R$ и выполнено неравенство (1). Через $\tilde{x}$ проведем луч, параллельный l, и в конусе $Q(\tilde{x}, \varepsilon)$ возьмем произвольную точку x', для которой

$$|f(x') - f(\tilde{x})| \leqslant (L + \varepsilon)|x' - \tilde{x}|. \tag{2}$$

Угол между векторами $\overrightarrow{x_1\tilde{x}}$ и $\overrightarrow{\tilde{x}x'}$ не превышает 2ε; легко проверить, что если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b}$ образуют тупоугольный треугольник с наибольшей стороной $|\bar{a} + \bar{b}|$, то $|\bar{a} + \bar{b}| \geqslant |\bar{a}| + |\bar{b}| \cdot |\cos(\bar{a}\,\hat{}\,, \bar{b})|$. Для треугольника $x_1\tilde{x}x'$ это дает

$$|x' - x_1| \geqslant |\tilde{x} - x_1| + |x' - \tilde{x}|\cos 2\varepsilon > R. \tag{3}$$

Складывая неравенства (1), (2), получаем

$$|f(x') - f(x_1)| \leqslant (L + 2\varepsilon)\left(|\tilde{x} - x_1| + |x' - \tilde{x}|\frac{L+\varepsilon}{L+2\varepsilon}\right).$$

Но при $\varepsilon < \frac{1}{L + \sqrt{L^2+4}}$

$$\cos 2\varepsilon \geqslant 1 - 2\varepsilon^2 \geqslant \frac{L+\varepsilon}{L+2\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{L+2\varepsilon},$$

а это вместе с (3) дает

$$|f(x') - f(x_1)| \leqslant (L + 2\varepsilon)|x' - x_1|,$$

что противоречит определению R в связи с (3).

Отсюда, как и ранее, легко следует условие Липшица с константой L на каждой координатной прямой.

Взяв две произвольные точки x_1, $x_2 \in G$, делим отрезок $\overline{x_1x_2}$ на конечное число столь малых отрезков Δ_m ($m = 1, 2, \ldots, m_0$), чтобы обычный «координатный» параллелепипед с диагональю Δ_m лежал в области G. Двигаясь по ребрам такого параллелепипеда, получаем условие Липшица для концов диагонали Δ_m с константой $K = nL^*$; суммируя полученные неравенства, завершаем доказательство теоремы 2.

Пользуясь прежними приемами, можно ослаблять условия этой теоремы (с сохранением ее заключения): например, исключить счетное множество, счетное на каждой координатной линии и т. д. Приведем следствие из теоремы 2.

Следствие. *Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — прямолинейная система координат и непрерывная функция $f(x)$ обладает нулевыми частными производными числами всюду в области определения, то она постоянна в этой области.*

Конечно, и для функции многих переменных можно определить D-дифференциал (укажем лишь, что в данном выше его определении нужно требовать, чтобы контингенция множества Q в точке x была полным пространством $\boldsymbol{R}^n$), доказать его существование почти всюду для любой конечной функции и т. д. Но это понятие требует большего развития. Например, важно дать описание множества всех D-дифференциалов в «большинстве» точек области, что, по-видимому, приведет к определенным каноническим подмножествам проективного пространства $\mathbf{R}P^{n-1}$.

3. Аналитические и липшицевы функции. Докажем теорему.

Теорема 3. *Пусть функция f голоморфна в произвольной компактной области $\overline{D} \subset \mathbf{C}^n$, $n \geqslant 1$, и непрерывна в $\overline{D}$. Если она удовлетворяет условию Липшица на границе ∂D:*

$$| f(\zeta_2) - f(\zeta_1) | \leqslant K | \zeta_2 - \zeta_1 |, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \partial D, \tag{4}$$

то она удовлетворяет этому условию и во всей замкнутой области $\overline{D}$ (и с той же константой).

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать для случая $n = 1$, так как любые две точки из $\overline{D}$ можно соединить аналитической прямой (т. е. подходящей действительной двумерной плоскостью).

Итак, пусть $\overline{D} \subset \mathbf{C}$. Ограниченные компоненты дополнения $\mathbf{C} \setminus \overline{D}$ образуют некоторое открытое множество O. Продолжим произвольно функция $f|_{\partial D}$ на это множество (см. [2]) с сохранением условия Липшица (1). Тем самым определим некоторую комплексную функцию $f_1(z)$ в замкнутой односвязной области $\overline{D_1} = \overline{D} \cup O$.

Теорема будет доказана, если покажем, что в каждой внутренней точке $z \in D$ производная $f'(z) = f_1'(\overline{z})$ ограничена числом K: $|f'(z)| \leqslant K$.

Пусть, напротив, в некоторой точке $z_0 \in D f'(z_0) = Ae^{i\alpha}$, $A = K + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим отображение области $\overline{D}_1$:

$$w = F(z) = f_1(z) - Ae^{i\alpha} z.$$

Для любых точек $z_1, z_2 \in \partial D \cup \overline{O}$ получим

$$|F(z_2) - F(z_1)| = | [f_1(z_2) - f_1(z_1)] - Ae^{i\alpha}(z_2 - z_1) | \geqslant A | z_2 - z_1 | - \\ - K | z_2 - z_1 | = \varepsilon | z_2 - z_1 |,$$

т. е. $F|_{\partial D \cup \overline{O}}$ — гомеоморфизм. Внутри каждой компоненты O — это гомеоморфизм, сохраняющий ориентацию; в самом деле, в любой точке $z \in O$ дифференцируемости функции $f_1(z)$ ее множество производных чисел $\mathfrak{M}_z$ — окружность, лежащая в круге $|\zeta| \leqslant K$, и сдвиг ее на вектор $Ae^{i\alpha}$, дающий $\mathfrak{M}_z$ для $F(z)$, — окружность, для которой начало координат $\zeta = 0$ внешняя точка, а это означает, что якобиан отображения $w = F(z)$ положителен [3].

* В прямоугольной системе константу можно взять равной $L/\sin\alpha$, где α — наименьший угол между направлениями репера $r(x)$.

На основании теоремы о продолжении [4] заключаем, что $F|_{D_1}$ — внутреннее отображение (по Стоилову), а в силу гомеоморфизма $F|_{\partial D_1}$ оно — гомеоморфизм и внутри D_1 [5]. В частности, в точках $z \in D$ производная $F'(z)$ должна быть отлична от нуля; но по условию $F'(z_0) = f_1'(z_0) - Ae^{i\alpha} = f'(z_0) - Ae^{i\alpha} = 0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трохимчук Ю. Ю. О дифференциальных свойствах функций.— Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 3, с. 289—294.
2. Лебедев Н. А. О распространении комплексных функций.— Вестник Ленингр. ун-та, 1963, № 13, вып. 3, с. 61—68.
3. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности.— М.: Физматгиз, 1963.— 222 с.
4. Трохимчук Ю. Ю. О непрерывных отображениях в евклидовом пространстве.— Укр. мат. журн., 1964, **16**, № 2, с. 196—211.
5. Зелинский Ю. Б. О критериях монотонности.— Десятая мат. школа, Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 277—289.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
26.I.1978 г.