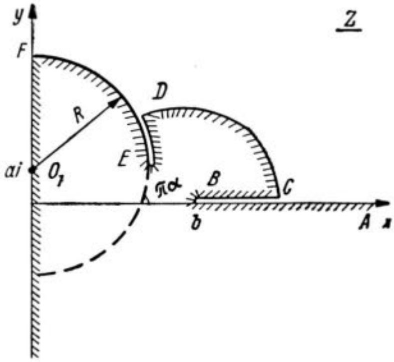
УДК 517.54

Э. Н. Береславский

О конформном отображении на прямоугольник некоторых круговых многоугольников с разрезами

1. Конформное отображение кругового пятиугольника с разрезом на верхнюю полуплоскость впервые изучалось в работе [1] в связи с решением некоторых задач фильтрации. В дальнейшем в [2 и 3] исследовались частные случаи такого пятиугольника, у которого все углы прямые. В процессе решения одной задачи фильтрации в статье [4] получено выражение для функции, отображающей прямоугольник на круговой шестиугольник частного вида с прямыми углами и двумя разрезами. Подобный шестиугольник рассматривался в работах [5, с. 187], а также в [6].

В данной статье исследуется задача о конформном отображении на прямоугольник произвольного кругового шестиугольника с прямыми углами и двумя разрезами. Предлагаемый метод позволил полностью решить задачу о параметрах отображения и получить широкие группы формул для отображения различных круговых многоугольников, в том числе и для всех ранее известных [2—7], а также отображающую функцию для одного прямолинейного семиугольника с двумя разрезами.



2. Пусть в плоскости z задан круговой шестиугольник $ABCDEF$ с прямыми углами при вершинах A, C, D, F и разрезами, имеющими вершины в точках B и E. Отобразим его конформно на прямоугольник плоскости w. Пусть вершины шестиугольника переходят в точки $w = 0$, w_1, K, $K + iK'$, w_2, iK'*. Функцию $z(w)$ можно представить в виде отношения двух линейно независимых интегралов уравнения

$$g'' + \frac{\sum_{n=1}^{2} (\operatorname{sn}^2 w_n - \operatorname{sn}^2 w)}{\prod_{n=1}^{2} (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 w_n)} (\operatorname{sn}^2 w)' g' + \frac{\sum_{n=0}^{3} \lambda_n \operatorname{sn}^{2n} w}{\prod_{n=1}^{2} (\operatorname{sn}^2 w - \operatorname{sn}^2 w_n)} g = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\operatorname{sn} w$ — эллиптическая функция Якоби, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k, $K' = K(\sqrt{1 - k^2})$, $\lambda_3 = 2k^2$; причем акцессорные параметры λ_n ($n = 0, 1, 2$), аффиксы точек w_n и модуль k заранее неизвестны**.

Уравнение (1) с двояко периодическими коэффициентами, общее решение которого, как нетрудно убедиться,— однозначная функция от w. Следуя работам [2, 9], можно показать, что если λ_n и w_n связаны между собой некоторыми независимыми уравнениями, то две функции

$$g_{1,2}(w) = \frac{\Theta(w \mp \tau_1)\,\Theta(w \mp \tau_2)}{\Theta^2(w)} e^{\pm \rho w}, \qquad (2)$$

где верхний знак отвечает функции $g_1(w)$, а нижний — $g_2(w)$,— линейно независимые решения уравнения (1). В выражении (2), ρ, τ_1 и τ_2 — некоторые постоянные, пока неопределенные, а $\Theta(w)$ — тета-функция Якоби с параметром $q = \exp\left(-\pi\frac{K'}{K}\right)$, однозначно связанным с k. Отметим свойство интегралов (2), вытекающее из свойств тета-функций:

$$g_{1,2}(w - 2K'i) = \exp\left\{\mp \left| 2\rho K' + \frac{\pi(\tau_1 + \tau_2)}{K} \right| i\right\} g_{1,2}(w). \qquad (3)$$

3. В дальнейшем шестиугольник будем характеризовать взаимным расположением разрезов. При этом возможны три случая.

1). Разрезы пересекаются (при продолжении) под углом $\pi\alpha$. Рассмотрим, к примеру, шестиугольник, изображенный на рисунке. Здесь разрез DEF представляет собой дугу окружности с центром в точке O_1 радиуса R, причем $a < R$, а абсцисса точки C определяется координатами точки $D(x_D, y_D)$ следующим образом: $x_C = \frac{(R + a)(R - a + y_D)}{x_D}$. Используя условие $[z(w -$

---

* В дальнейшем многоугольник ABCDEF, как это принято в [7], будем обозначать $\left\{\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{2}\right\}$.

** В работе [8] показана принципиальная возможность построения системы уравнений относительно этих неизвестных для общего случая кругового многоугольника, однако вопрос об их практическом определении и, притом в форме, удобной для приложений, остается до сих пор открытым.

$-2K'i)+ai][z(w)-ai]=R^2$, которое следует из принципа симметрии, и учитывая (3), получаем

$$z(w)=\sqrt{R^2-a^2}\,\frac{\Theta(w+\tau_1)\,\Theta(w+\tau_2)\,e^{-\rho w}+\Theta(w-\tau_1)\,\Theta(w-\tau_2)\,e^{\rho w}}{\Theta(w+\tau_1)\,\Theta(w+\tau_2)\,e^{-\rho w}-\Theta(w-\tau_1)\,\Theta(w-\tau_2)\,e^{\rho w}}. \qquad (4)$$

При этом оказывается, что

$$2\rho K'+\frac{\pi(\tau_1+\tau_2)}{K}=\pi\alpha, \qquad 2\rho K=\ln\frac{Ry_D}{R^2-a^2+ay_D+x_D\sqrt{R^2-a^2}}. \qquad (5)$$

Соответствия точек B и E

$$z(w_1)=b,\ z(w_2)=ai+Re^{\pi\beta i} \qquad (6)$$

вместе с (5) полностью определяют искомые параметры ρ, τ_1, τ_2 и q по геометрическим характеристикам шестиугольника. Справедливость выражения (4) при выполнении условий (5) устанавливается непосредственной проверкой.

2). Разрезы касаются (при продолжении), что соответствует $\alpha=0$ или $a=R$. Этот случай получается из формулы (4) путем предельного перехода $a\to R$, в результате чего для отображающей функции находим выражение

$$z(w)=\frac{2\pi RKy_D}{\pi x_D w+K(Ky_D+K'x_D)\,[Z(w+\tau_1)+Z(w-\tau_1)]}, \qquad (7)$$

где $Z(w)=\frac{\Theta'(w)}{\Theta(w)}$ — дзета-функция Якоби. Неизвестные параметры τ_1 и q в данном случае определяются из равенств (6). Интересно отметить, что дробно-линейное преобразование $1/z$ переводит рассматриваемую область в прямолинейный семиугольник.

3). Разрезы не имеют (при продолжении) общих точек, что соответствует $a>R$. В этом случае формула для отображающей функции получается из выражений (4) — (5) с заменой в них ρ, τ_1, τ_2 на ρi, $\tau_1 i$, $\tau_2 i$ соответственно. При этом, согласно работе [7], под углом $\pi\alpha$ в данном случае следует понимать величину, равную $\pi i\ln\frac{\sqrt{a+R}+\sqrt{a-R}}{\sqrt{a+R}-\sqrt{a-R}}$.

4. Рассмотрим частные случаи. 1). Если $x_D=0$, то имеем шестиугольники, рассмотренные в [4 — 6]. Как следует из (5), $\rho=0$. 2). Функции, отображающие на прямоугольник пятиугольники с разрезом и четырехугольники, получающиеся из шестиугольника $\left\{\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{2}\right\}$, находятся из выражения (4) при $\tau_2=0$*. В случае вырождения одного из разрезов получаются пятиугольники $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{2}\right\}$, $\left\{\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, $\left\{\frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\, \frac{\pi}{2}\right\}$, $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$. При $x_D=0$ из последних двух получаются пятиугольники, рассмотренные в [2 — 5]. В случае вырождения обоих разрезов получаются четырехугольники $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ и $\left\{\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, исследованные в работе [7], а также четырехугольник $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

---

* При этом соответствующие выражения (6) обращаются в тождества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым задачам о движении грунтовых вод (число особых точек больше трех).— Изв. АН СССР, 1939. Сер. мат., № 5—6,. с. 579—602.
2. Калинин Н. К. К вопросу о фильтрации в многослойном грунте. Диссертация.— Саратов, 1943.— 105 с.
3. Чилап А. Я. К задаче о прорыве законтурной воды к галерее скважин.— Изв. вузов. Математика, 1960, **16**, № 3, с. 241—255 .
4. Нумеров С. Н. О некоторых частных случаях конформного отображения круговых многоугольников на прямоугольник.—Укр. мат. журн., 1975, **27**, № 6, с. 831—833.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод.— 2-е изд.— М.: Наука, 1977.— 664 с.
6. Капранов Ю. И. О кайме пресных вод в случае периодической системы горизонтальных трубчатых дрен.— В кн.: Краевые задачи подземной гидродинамики. Киев: Институт математики АН УССР, 1976, с. 67—84.
7. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений.— М.:Изд-во иностр. лит., 1963.— 406 с.
8. Цицкишвили А. Р. О конформном отображении полуплоскости на круговые многоугольники.— ДАН СССР, 1973, **211**, № 2, с. 300—303.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М: Физматгиз, 1962.— 343 с.

Ленинградский
инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
15.V1978 г.