УДК 519.21

М. Е. Зюков

Распределение некоторых функционалов для случайного блуждания с ограниченными снизу скачками

1. При изучении распределений граничных функционалов от случайных блужданий, как показано в работе [1], универсальным является факторизационный подход. В то же время для полунепрерывных случайных блужданий имеется много результатов (например, [2, 3]), полученных ввиду специфики блуждания методами, отличными от факторизационных (прямые вероятностные [2], метод потенциала [3]).

В данной работе рассматриваются случайные блуждания специального вида — целочисленные случайные блуждания, у которых величина скачка ограничена снизу. Изучается совместное распределение времени достижения отрицательного уровня и величина перескока через него. Как следствие находится распределение абсолютного минимума. Метод, предложенный в работе [4], позволяет найти их производящие функции через корни уравнения, содержащего производящую функцию величины скачка и в некоторых случаях установить характер этих корней, что важно для асимптотического анализа.

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых целочисленных случайных величин с распределениями $P\{\xi_k = j\} = p_j$ $\left(k \geqslant 1, \quad j \geqslant -r, \sum\limits_{j \geqslant -r} p_j = 1, \ p_{-r} > 0, \ r > 0\right)$ и производящей функцией $a(z)$, $0 < |z| \leqslant 1$.

Положим $s_0 = 0$, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n \geqslant 1$. Обозначим $\tau_k = \inf\{n : s_n \leqslant -k\}$, $k \geqslant 0$. Если $s_n > -k$ для всех n, то, по определению, $\tau_k = \infty$. На тех траекториях, где $\tau_k < \infty$, положим $T_k = -k - s_{\tau_k}$.

Последовательность $\{T_k, \tau_k\}$, $k \geqslant 0$, — однородная цепь Маркова, однородная по второй компоненте [4]. Введем обозначения

$$P_{ij}^{(k)}(n) = P\{T_k = j, \tau_k = n / T_0 = i, \ \tau_0 = 0\}, \ k \geqslant 1, \quad \varphi_{ij}^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{ij}^{(k)}(n),$$

$$|z| \leqslant 1, \qquad \varphi_{0j}^{(1)}(z) = \varphi_j(z),$$

$$\Phi(z) = \left\| \begin{matrix} \varphi_0(z) & \varphi_1(z) & \dots & \varphi_{r-2}(z) & \varphi_{r-1}(z) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда согласно [4]

$$\| \varphi_{ij}^{(k)}(z) \|_{i,j=0}^{r-1} = \Phi^k(z), \quad k \geqslant 1.$$

Характеристическое уравнение матрицы $\Phi(z)$ имеет вид

$$\lambda^r - \sum_{k=0}^{r-1} \varphi_k(z) \lambda^{r-k-1} = 0. \tag{1}$$

По теореме Руше все собственные значения матрицы $\Phi(z)$ ($|z| < 1$) лежат внутри единичного круга.

Лемма. *При фиксированном z ($0 < |z| < 1$) собственные значения матрицы $\Phi(z)$ совпадают с корнями уравнения*

$$1 - za(\lambda) = 0 \tag{2}$$

в круге $|\lambda| < 1$

Доказательство. Пусть $\lambda_i = \lambda_i(z)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, — корни уравнения (1) кратности n_i $(n_1 + \ldots + n_k = r)$. Тогда [5]

$$\Phi^n(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(n_i - 1)!} \left(\frac{C(\lambda)}{\psi_i(\lambda)} \lambda^n \right)_{\lambda=\lambda_i}^{(n_i-1)}, \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

где $\psi_i(\lambda) = \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{nj}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $C(\lambda)$ — «приведенная» присоединенная матрица для матрицы $\lambda E - \Phi(z)$ (E — единичная матрица). В нашем случае $C(\lambda)$ совпадает с присоединенной матрицей для $\Phi(z)$.

Из соотношения (3) следует, что

$$\varphi_{00}^{(n)}(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(n_i - 1)!} (u_i(\lambda) \lambda^{n+r-1})_{\lambda=\lambda_i}^{(n_i-1)}, \quad n \geqslant 1,$$

где $u_i(\lambda) = \psi_i^{-1}(\lambda)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Последнее выражение можно записать в виде

$$\varphi_{00}^{(n)}(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(n_i - 1)!} \sum_{j=0}^{n_i-1} C_{n_i-1}^{j} N(j) \lambda_i^{n+r-1-j} u_i^{(n_i-1-j)}(\lambda_i), \tag{4}$$

где $N(j) = \prod_{i=1}^{j} (n + r - i)$, $N(0) = 1$.

Используя стохастические соотношения

$$\tau_k \doteq 1 + \tau_{k+\xi_1}, \ k > 0; \qquad \tau_k = 0, \ k \leqslant 0, \ T_k \doteq T_{k+\xi_1}, \ k > 0;$$

$$T_k = -k, \quad k \leqslant 0,$$

где знак $\doteq$ означает совпадение распределений, можно получить, что для $n > r$ справедливо равенство

$$\varphi_{00}^{(n)}(z) = z \sum_{k \geqslant -r} p_k \varphi_{00}^{(n+k)}(z). \tag{5}$$

Подставляя выражения (4) в (5), после очевидных преобразований получаем равенство $(n > r)$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{n_i-1} N(j)\,\lambda_i^{n-r-1}\left\{\frac{\lambda_i^{2r-i}}{(n_i-1)!}\left[C_{n_i-1}^{j}u_i^{(n_i-1-j)}(\lambda_i)\left[1-za(\lambda_i)\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-z\sum_{m=j+1}^{n_i-1} C_{n_i-1}^{m}C_m^{j}u_i^{(n_i-1-m)}(\lambda_i)\,a^{(m-j)}(\lambda_i)\right]\right\}=0.$$

Обозначая выражение в фигурных скобках через y_{ij}, $0 \leqslant j \leqslant n_i-1$, последнее равенство можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{n_i-1} N(j)\lambda_i^{n-r-1}y_{ij}=0, \quad n > r. \tag{6}$$

Подставляя в (6) последовательно $n = r+1, \ldots, 2r$, получаем однородную систему r-го порядка для определения y_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant k$, $0 \leqslant j \leqslant n_i-1$. Определитель этой системы элементарным преобразованием может быть приведен к виду

$$\prod_{i=1}^{k}\lambda_i^{\frac{n_i(n_i-1)}{2}}\Delta,$$

где определитель Δ получается из определителя Вандермонда r-го порядка $W(x_{10}, \ldots, x_{1,n_1-1}, \ldots, x_{k0}, \ldots, x_{k,n_k-1})$ дифференцированием j раз по x_{ij}, $0 \leqslant j \leqslant n_i-1$ и подстановкой λ_i вместо x_{ij}, $0 \leqslant j \leqslant n_i-1$. Он, очевидно, отличен от нуля.

Тогда все y_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant k$, $0 \leqslant j \leqslant n_i-1$, равны нулю и из их вида следует, что λ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ — корни уравнения (2) кратности $m_i \geqslant n_i$. Из того, что уравнение (2) при $0 < |z| < 1$ имеет r корней в круге $|\lambda| < 1$ с учетом их кратности (см. [5]), следует, что на самом деле $m_i = n_i$, что доказывает лемму.

Из вида характеристического уравнения (1) матрицы $\Phi(z)$ и доказанной леммы вытекает теорема.

Теорема 1. *При фиксированном z $(0 < |z| < 1)$ производящие функции $\varphi_j(z)$, $0 \leqslant j \leqslant r-1$ — с точностью до знака элементарные симметрические функции корней уравнения* (2) *в круге* $|\lambda| < 1$.

Заметим, что в нашем случае

$$\varphi_{0,j}^{(k)}(z) = M(z^{\tau_k}; T_k = j), \quad 0 \leqslant j \leqslant r-1, \quad k \geqslant 1.$$

Так как элементы первой строки матрицы $C(\lambda)$ легко считаются, то формула (3) дает возможность находить совместное распределение τ_k и T_k. В случае, когда все корни уравнения (2) простые,

$$M(z^{\tau_k}; T_k = 0) = \sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i^{k+r-1}}{\psi_i(\lambda_i)}, \quad |z| < 1, \quad k \geqslant 1,$$

$$M(z^{\tau_k}; T_k = j) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=j}^{r-1}\frac{\varphi_l(z)\,\lambda_i^{k+r+j-l-2}}{\psi_i(\lambda_i)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r-1.$$

3. Характер корней уравнения (2) в круге $|\lambda| < 1$ уточняет следующая теорема.

Теорема 2. *Если наибольший общий делитель (н.о.д.) тех значений, которые ξ_1 принимает с положительной вероятностью, равен* 1, *то* *при* $0 < z \leqslant 1$ *неотрицательная матрица* $\Phi(z)$ *неразложима и примитивна.*

Доказательство. Так как $\varphi_{r-1}(z) \geqslant p_{-r}z > 0$ и на разложимость неотрицательной матрицы не влияет величина положительных элементов, а лишь их взаимное расположение, то разделим все элементы первой строки матрицы $\Phi(z)$ на их сумму. Полученной стохастической матрице соответствует неприводимая цепь Маркова. Поэтому матрица $\Phi(z)$ неразложима.

Докажем примитивность $\Phi(z)$. Рассмотрим случай $P\{\xi_1 > 0\} > 0$. Обозначим $n_1, n_2, \ldots$ — положительные, а $-m_1, -m_2, \ldots, -m_q$, $(q \leqslant r)$ — отрицательные значения, которые ξ_1 принимает с положительной вероятностью, а n и m — их н.о.д. соответственно. Ясно, что можно выбрать конечное число $n_1, \ldots, n_p$ так, чтобы их н.о.д. был равен n.

Из условия теоремы следует, что n и m взаимно просты, поэтому уравнение $nx + my = r - 1$ имеет решение в целых числах. Пусть (x_0, y_0) — какое-либо решение. Перепишем тождество $nx_0 + my_0 = r - 1$ в виде $n(x_0 + km) - m(kn - y_0) = r - 1$.

Из арифметической леммы [6, с. 125] следует, что при достаточно больших k последнее равенство можно записать в виде $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i n_i - \sum_{j=1}^{q} \beta_j m_j = r - 1$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_j \geqslant 0$ и не все из них равны нулю. Тогда

$$\varphi_0(z) \geqslant \prod_{i=1}^{p} p_{n_i}^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{q} p_{-m_j}^{\beta_j} p_{-r} z^{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j + 1} > 0.$$

Согласно работе [7, с. 377] матрица $\Phi(z)$ примитивна.

В случае $P\{\xi_1 > 0\} = 0$ $m = 1$ и примитивность $\Phi(z)$ следует из упомянутой ссылки.

Таким образом, в условиях теоремы 2 при $0 < z < 1$ уравнение (2) имеет в круге $|\lambda| < 1$ простой действительный положительный корень $\lambda_1(z)$, причем модули всех остальных корней в этом круге меньше $\lambda_1(z)$.

Обозначим $\zeta = \inf\{0, s_1, s_2, \ldots\}$. Известно, что если $M\xi_1 \leqslant 0$, то $\zeta = -\infty$ с вероятностью 1. Из теорем 1 и 2 вытекает следствие.

Следствие. *Если* $M\xi_1 > 0$, *то*

$$u(z) = Mz^{-\zeta} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1 - \mu_k}{1 - z\mu_k}, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$

где μ_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, *— корни уравнения* $a(\mu) = 1$ *в круге* $|\mu| < 1$.

Действительно, в условиях следствия, по теореме 2, все собственные значения μ_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, матрицы $\Phi(1)$ лежат внутри единичного круга. Поэтому согласно работе [5] справедливо разложение

$$(E - z\Phi(1))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Phi^n(1), \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \tag{7}$$

Используя теорему 1, легко подсчитать, что сумма элементов первой строки матрицы $(E - z\Phi(1))^{-1}$ равна

$$\left(1 - z \prod_{k=1}^{r} \frac{1 - \mu_k}{1 - z\mu_k}\right)(1 - z)^{-1}. \tag{8}$$

Из свойств матрицы Φ (1) следует, что сумма элементов первой строки матрицы Φ^n (1) равна $P\{\tau_n < \infty\} = P\{\zeta \leqslant -n\}$. Поэтому сумма элементов первой строки матрицы, определяемой первой частью равенства (7), равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{\zeta \leqslant -n\} = \frac{1 - zu(z)}{1 - z}. \tag{9}$$

Сопоставление (8) и (9) доказывает следствие.

Аналогичный результат для $r = 2$ получен в работе [8]. Впрочем сформулированное следствие немедленно следует из результатов [1], так как в нашем случае положительная компонента факторизации $1 - a(z)$ находится в явном виде через корни μ_k, $1 \leqslant k \leqslant r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.— М.:Наука, 1972.— 367 с.
2. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов.— М.:Мир, 1971.— 264 с.
3. Королюк В. С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.— К.: Наук. думка, 1975.— 138 с.
4. Ежов И. И. Цепи Маркова, однородные по второй компоненте, и их применение к задаче о времени выхода за данный уровень.— Труды шестой математической школы по теории вероятностей и математической статистике. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1969, с. 295—312.
5. Kemperman J. H. B. The passage problem for a stationary Markov chains. Chicago, University of Chicago Press, 1961, p. 127.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. I.— М.: Наука, 1961.— 664 с.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 575 с.
8. Корнийчук М. Т., Маркова Л. Н. Исследование одного класса систем массового обслуживания с дискретным временем: Препринт 77.9. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1977.— 50 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
12.IV 1978 г