УДК 517.948

В. Н. Павленко

Нелинейные уравнения с разрывными операторами в банаховых пространствах

Рассматривается уравнение вида

$$Ax + F(x) = 0, \tag{1}$$

где A — линейный замкнутый оператор с плотной в E областью определения со значениями в сопряженном пространстве E^*, $F(x)$ — нелинейный оператор из E в E^*, E — рефлексивное вещественное банахово пространство. Методом монотонных отображений для уравнения (1) устанавливаются теоремы существования и единственности, которые затем применяются при изучении задачи Дирихле для эллиптических уравнений с разрывными слабыми нелинейностями.

1. Пусть T — нелинейный оператор, действующий из E в E^*, с областью определения $D(T)$.

Определение 1. Назовем $x \in D(T)$ точкой h-непрерывности оператора T, если $\forall h \in D(T)$ $\lim\limits_{t\to 0+} \langle T(x+th), h\rangle = \langle T(x), h\rangle$, где $\langle y, x\rangle$ — значение линейного функционала $y \in E^*$ на векторе $x \in E$. В противном случае $x \in D(T)$ будем называть *точкой разрыва оператора* T.

Определение 2. Скажем, что точка разрыва x оператора T регулярна, если найдется $h \in D(T)$ такой, что $\lim\limits_{t\to 0+} \langle T(x+th), h\rangle < 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* 1) *A — максимальный монотонный оператор*; 2) *оператор F монотонен и ограничен в открытом шаре $B(R)$ с центром в нуле пространства, причем, существует $0 < r < R$ такое, что $\langle Ax + F(x), x\rangle \geqslant 0$, если $\|x\| = r$ и $x \in D(A)$*; 3) *точки разрыва оператора $A + F$, принадлежащие $D(A) \cap \bar{B}(r)$, регулярны.*

Тогда уравнение (1) *разрешимо.*

Замечание. Если $A + F$ — строго монотонный оператор, то решение уравнения (1) единственно.

Доказательство теоремы 1. Пусть Φ — максимальное монотонное отображение из E в 2^{E^*} [1], график которого содержит график оператора F на $B(R)$ (существование такого Φ следует из леммы Цорна). Поскольку

A — максимальный монотонный оператор и $0 \in (\operatorname{int} D(\Phi)) \cap D(A)$, то отображение $A+\Phi$ максимальное монотонное [2, теорема 10], а следовательно, и регулярное [2, с. 255].

Обозначим буквой J нормальное дуальное отображение из E в 2^{E^*}, т. е.

$$Jx = \{u \in E^* : \langle u, x \rangle = \|u\| \cdot \|x\|, \ \|u\| = \|x\|\}.$$

Известно [1], что J — ограниченный, коэрцитивный, максимальный монотонный оператор, определенный на всем E. Из регулярности $A+\Phi$ следует для любого натурального n существование $x_n \in D(A) \cap D(\Phi)$ такого, что для некоторых $u_n \in Jx_n$ и $\omega_n \in \Phi(x_n)$ справедливо равенство

$$Ax_n + w_n + \frac{1}{n} u_n = 0. \tag{2}$$

Покажем, что $\|x_n\| \leqslant r$. Допустим противное, т. е. $\|x_n\| > r$. Положим $\lambda_n z_n = x_n$, где $\lambda_n = \|x_n\|/r$, $\|z_n\| = r$. Поскольку $A + \Phi + \frac{1}{n} J$ — монотонное отображение, то $\langle Az_n + F(z_n) + \frac{1}{n} y_n, z_n - x_n \rangle \geqslant 0$, где $y_n \in Jz_n$. Отсюда, учитывая, что $x_n = \lambda_n z_n$, $\langle y_n, z_n \rangle = \|z_n\|^2$, получим $(1-\lambda_n)(\langle Az_n + F(z_n), z_n \rangle + \frac{1}{n}\|z_n\|^2) \geqslant 0$, что невозможно, так как в силу условия 2) теоремы 1 $\langle Az_n + F(z_n), z_n \rangle + \frac{1}{n}\|z_n\|^2 > 0$, а $1 - \lambda_n < 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\|x_n\| \leqslant r$. Пусть $\{x_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к некоторому x_0. Покажем, что $x_0 \in D(A)$. По условию оператор $F(x)$ ограничен в шаре $B(R)$ и, значит, найдется постоянная $C > 0$ такая, что $\|F(x)\| \leqslant C$ $(\forall x \in B(R))$. Для любого $w_n \in \Phi(x_n)$ и произвольного $x \in B(R)$ имеем $\langle F(x) - w_n, x - x_n \rangle \geqslant 0$. Полагая в этом неравенстве $x = x_n + tv_n$, где $\|v_n\| = 1$ $\langle w_n, v_n \rangle = \|w_n\|$, $0 < t < R - r$, получаем $\langle F(x_n + tv_n) - w_n, tv_n \rangle \geqslant 0$. Откуда следует, что $\|F(x_n + tv_n)\| \geqslant \|w_n\|$. Но $\|F(x_n + tv_n)\| \leqslant C$, поэтому $\|w_n\| \leqslant C$, что совместно с равенствами $\|u_n\| = \|x_n\|$ и (2) дает оценку $\|Ax_n\| \leqslant C + r$. Отсюда и замкнутости оператора A следует, что $x_0 \in D(A)$. Точки $\{x, Ax + F(x) + w/n_k\}$, $w \in Jx$ $(x \in D(A) \cap B(R))$, и $\{x_{n_k}, 0\}$ принадлежат графику монотонного отображения $A + \Phi + (n_k)^{-1} J$, поэтому

$$\langle Ax + F(x) + w/n_k, \ x - x_{n_k} \rangle \geqslant 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n_k \to \infty$, получаем $\langle Ax + F(x), x - x_0 \rangle \geqslant 0$ $(\forall x \in D(A) \cap B(R))$. В частности, при $x = x_0 + th$ $(h \in D(A))$, $0 < t < (R-r)/\|h\|$, имеем $\langle A(x_0 + th) + F(x_0 + th), th \rangle \geqslant 0$, и следовательно,

$$\lim_{t \to 0+} \langle T(x_0 + th), h \rangle \geqslant 0, \tag{3}$$

где $T = A + F$. Отсюда заключаем, что x_0 точка h-непрерывности оператора T, так как в противном случае x_0 — точка регулярного разрыва оператора T и, следовательно, найдется вектор $h(x_0) \in D(A)$ такой, что $\lim\limits_{t \to 0+} \langle T(x_0 + th), h \rangle < 0$. Из h-непрерывности оператора T в точке x_0 и (3) следует $\langle T(x_0), h \rangle \geqslant 0$ $(\forall h \in D(A))$. Последнее возможно лишь при $Tx_0 = 0$. Теорема 1 доказана.

2. Рассмотрим граничную задачу

$$\tau u + f(u(x)) = 0, \ \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \omega, \tag{4}$$

$$\partial_\nu^r(S)\, u(x) = 0, \ x \in S, \ 0 \leqslant r \leqslant m - 1, \tag{5}$$

где $\tau = \sum_{1 \leqslant |j| \leqslant 2m} a_j(x)\,\partial^j$ — формальный дифференциальный оператор четного порядка, определенный в ограниченной области ω и удовлетворяющий неравенству $(-1)^m \sum_{|j|=2m} a_j \xi^j \geqslant \alpha |\xi|^{2m}$, $x \in \overline{\omega}$, $\xi \in R^n$, постоянная α положительна и не зависит от x и ξ; функции $a_j(x)$ вещественны и непрерывны в $\overline{\omega}$, граница S области ω гладкая, $\partial_\nu^r(S)$ — производные в направлении внутренней нормали. Обозначим через V замыкание в метрике $W_q^{2m}(\omega)$ всех функций из $C^{2m}(\overline{\omega})$, удовлетворяющих условиям (5). Можно показать, что V совпадает с подпространством функций из $W_q^{2m}(\omega)$, которые вместе со всеми своими производными до порядка $m-1$ включительно обращаются в нуль на S (в смысле С. Л. Соболева).

Назовем обобщенным решением задачи (4) — (5) функцию $u(x) \in V$, почти всюду на ω удовлетворяющую уравнению (4).

Теорема 2. *Предположим, что* 1) *функция* $f(u)$ *неубывающая и непрерывная справа на* R^1 *и для любой точки разрыва* u_0 *этой функции* $f(u_0 -)\cdot f(u_0) > 0$; 2) $|f(u)| \leqslant a + b|u|^{p-1}$ $\forall u \in R^1$, *где* a *и* b — *положительные константы*, $p = q/(q-1)$, *причем* $q > 1$, *если* $n - 2m \leqslant 0$, *и* $q \geqslant 2n/(n+2m)$, *если* $n - 2m > 0$; 3) $\int_\omega (\tau u(x))\cdot u(x)\,dx \geqslant c \|u\|_{W_2^m(\omega)}$ *для любой* $u(x) \in C^{2m}(\overline{\omega})$ *и удовлетворяющей условиям* $\partial^j u(x) = 0$, $x \in S$, $0 \leqslant |j| \leqslant m-1$ (c — *положительная константа, не зависящая от* $u(x)$).

Тогда задача (4) — (5) *имеет единственное обобщенное решение.*

Доказательство. Из теорем вложения [3] и условия 2) теоремы 2 следует, что пространство W_q^{2m} непрерывно вкладывается в L_p, $p = q/(q-1)$. Определим линейный оператор A с плотной в L_p областью определения $D(A) = V$ со значениями в L_q равенством $Au = \tau u$ для любого $u \in V$. Так как для q, удовлетворяющего условию 2) теоремы 2, оператор вложения W_q^{2m} в W_2^m ограничен [3], то из условия 3) теоремы 2 получим $\forall u \in D(A)$

$$\langle Au, u\rangle = \int_\omega (\tau u(x))\cdot u(x)\,dx \geqslant c\|u\|^2_{W_2^m}. \tag{6}$$

Из неравенства (6) заключаем, что A — монотонный оператор. В [4] показано, что область значений оператора A совпадает с L_q и для произвольной функции $u(x) \in D(A)$ имеет место оценка $\|u\|_{W_q^{2m}} \leqslant c_1 \|Au\|_{L_q}$, где постоянная $c_1 > 0$ и не зависит от u. Если кроме этого учесть непрерывность оператора вложения пространства W_q^{2m} в L_p, то получим, что оператор A имеет ограниченный обратный, определенный на всем L_q. Отсюда следует, что A — максимальный монотонный оператор [5, лемма 3], а также замкнутость оператора A.

Функция $f(u)$ измерима по Борелю. Поэтому для любой измеримой на ω функции $u(x)$ суперпозиция $f(u(x))$ также измерима. Отсюда и из оценки из условия 2) теоремы 2 следует, что оператор F, определяемый соотношением $F(u) = f(u(x))$, $u(x) \in L_p$, действует из L_p в L_q и ограничен на ограниченных множествах. Так как функция $f(u)$ неубывающая, то оператор F монотонный. Оценим $\langle F(u), u\rangle = \int_\omega f(u(x))\cdot u(x)\,dx$, $u(x) \in L_p$. Вначале предположим, что у $f(u)$ нет нулей на R^1. В этом случае из условия 1) теоремы 2 следует, что $f(u)$ не может иметь значения разных знаков. Пусть $f(u)$ всюду неотрицательна, тогда для произвольной функции $u(x)$ из L_p

$$\langle F(u), u\rangle = \int_\omega f(u(x))\cdot u(x)\,dx = \int_{\omega \setminus \omega_-} f(u(x))\cdot u(x)\,dx + \int_{\omega_-} f(u(x)) \times$$

$$\times u(x)\,dx \geqslant f(0)\int_{\omega^-} u(x)\,dx \geqslant -f(0)\int_{\omega} |u(x)|\,dx \geqslant -f(0)\cdot\|u\|\cdot(\mathrm{mes}\,\omega)^{1/q},$$

где $\omega^- = \{x\in\omega : u(x) < 0\}$. Аналогично, если $f(u) \leqslant 0$ на R^1, получим неравенство

$$\langle F(u), u\rangle \geqslant f(0)(\mathrm{mes}\,\omega)^{1/q}\cdot\|u\| \quad (\forall\, u\in L_p).$$

Пусть теперь $f(u)$ имеет нуль, т. е. существует $u_0\in R^1$, удовлетворяющее равенству $f(u_0)=0$. Тогда либо $u_0 \leqslant 0$, либо $u_0 > 0$. В первом случае для любой функции $u(x)\in L_p$ имеем

$$\langle F(u), u\rangle = \int_{\omega_1} f(u(x))\cdot u(x)\,dx + \int_{\omega\setminus\omega_1} f(u(x))\cdot u(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\omega_1} f(u(x))\cdot u(x)\,dx \geqslant -f(0)\cdot|u_0|\cdot\mathrm{mes}\,\omega,$$

где $\omega_1 = \{x\in\omega : u_0 \leqslant u(x) \leqslant 0\}$. Аналогично, если $u_0 > 0$, получим оценку $\langle F(u), u\rangle \geqslant f(0)\cdot u_0\cdot\mathrm{mes}\,\omega$.

Таким образом, доказано неравенство

$$\langle F(u), u\rangle \geqslant -k_1\|u\| - k_2 \quad (\forall\, u\in L_p), \tag{7}$$

где $k_1 = |f(0)|(\mathrm{mes}\,\omega)^{1/q}$, $k_2 = 0$, если у $f(u)$ нулей нет, и $k_1 = 0$, $k_2 = |f(0)|\cdot|u_0|\cdot\mathrm{mes}\,\omega$, если u_0 — нуль функции $f(u)$.

В силу условия 2) теоремы 2 оператор вложения W_2^m в L_p ограничен [3], следовательно, существует постоянная c_2 такая, что $\|u\|_{L_p} \leqslant c_2\|u\|_{W_2^m}$ $\forall\, u\in W_2^m$. Учитывая это, из неравенства (6) получаем $\langle Au, u\rangle \geqslant \frac{c}{c_2^2}\,\|u\|^2_{L_p}$ $(\forall\, u\in(D(A))$.

Отсюда и из оценки (7) следует существование $r > 0$, удовлетворяющего условию $\langle Au + F(u), u\rangle \geqslant 0$, если $\|u\| \geqslant r$ и $u\in D(A)$. То, что оператор $A + F$ может иметь только регулярные точки разрыва, доказывается так же, как в работе [6]. Таким образом, для операторов A и F выполняются все условия теоремы 1, кроме того, оператор $A + F$ строго монотонный. Поэтому найдется только одна функция $u(x)\in D(A)$, удовлетворяющая уравнению $Au + F(u) = 0$. Отсюда следует, что задача (4)—(5) имеет единственное обобщенное решение. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Browder F. Nonlinear variational enequalities and maximal monotone mappings in Banach spaces.— Math. Ann. 1969, **183**, p. 213—231.
2. Browder F., Hess P. Nonlinear mappings of monotone type Banach spaces.— J. Funct. Anall., 1972, **11**, № 3, p. 251—294.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.—256 с.
4. Кошелев А. И. Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем.— Успехи мат. наук, 1958, вып. 4, с. 29—89.
5. Browder F. Nonlinear maximal monotone operators in Banach Space.— Math. Ann., 1968, **175**, p. 89—113.
6. Павленко В. Н. Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами.— Вестн. МГУ, 1973, № 6, с. 21—29.

Челябинский
политехнический институт

Поступила в редакцию
18.IV 1978 г.