УДК 517.928.7

В. А. Плотников

Усреднение дифференциальных включений

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in \varepsilon X(t, x), \; x(0) = x^0, \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор, t — время, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $X(t, x)$ — 2π-периодическая по t многозначная функция, ставящая в соответствие каждой точке (t, x) из некоторой области $(n+1)$-мерного пространства компактное множество $X(t, x)$ n-мерного пространства.

Поставим в соответствие включению (1) следующее усредненное:

$$\frac{d\xi}{dt} \in \varepsilon \overline{X}(\xi), \; \xi(0) = x^0, \tag{2}$$

где

$$\overline{X}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(t, \xi)\, dt. \tag{3}$$

Покажем, что первая теорема Н. Н. Боголюбова [1, 2] может быть применена для дифференциальных включений.

Теорема 1. *Пусть многозначное отображение $X(t, x)$ определено в области $Q\{t \geqslant 0, x \in D \subset R^n\}$ и в этой области*

1) *отображение $X(t, x)$ — непустой компакт при всех допустимых значениях аргументов, непрерывно, равномерно ограничено, удовлетворяет условию Липшица по x с постоянной λ, т. е.*

$$X(t, x) \subset S_M(0), \; \delta(X(t, x'), X(t, x'')) \leqslant \lambda \| x' - x'' \|, \tag{4}$$

где $\delta(P, Q)$ — расстояние по Хаусдорфу [3, 4] между множествами P и Q, т. е.

$$\delta(P, Q) = \min\{d \,|\, P \subset S_d(Q), \; Q \subset S_d(P)\},$$

$S_d(N)$ — означает d-окрестность множества N в пространстве R^n;

2) *отображение $X(t, x)$ — 2π-периодично по t;*

3) *для всех $x^0 \in D' \subset D$ решения включения (2) лежат в области D вместе с некоторой ρ-окрестностью.*

Тогда для любого $L > 0$ найдутся такие $\varepsilon^0(L) > 0$ и $c(L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$

1) *для любого решения $x(t)$ включения (1) существует решение $\xi(t)$ включения (2) такое, что*

$$\| x(t) - \xi(t) \| \leqslant c\varepsilon; \tag{5}$$

2) *для любого решения $\xi(t)$ включения (2) существует решение $x(t)$ включения (1) такое, что справедливо неравенство (5).*

Таким образом, справедлива оценка

$$\delta(\overline{R}(t), R^1(t)) \leqslant c\varepsilon, \tag{6}$$

где $\overline{R}(t)$ — сечение семейства решений включения (2), а $R^1(t)$ — замыкание сечения $R(t)$ семейства решений включения (1).

Доказательство. На основании теоремы А. А. Ляпунова [5—7] множество $\overline{X}(\xi)$ выпукло и компактно, а также

$$\overline{X}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{conv} X(t, \xi)\, dt. \tag{7}$$

Следовательно, дифференциальное включение (2) усредненное как для включения (1), так и для включения

$$\frac{dx}{dt} \in \varepsilon \operatorname{conv} X(t, x), \ x(0) = x^0. \tag{8}$$

Так как семейство решений включения (1) всюду плотно в компактном множестве семейства решений (8) [6—8], то достаточно доказать теорему для включений (8) и (2).

Докажем сначала справедливость первого утверждения теоремы и, следовательно, включения

$$R^1(t) \subset S_{c\varepsilon}(\overline{R}(t)). \tag{9}$$

Пусть $x(t)$ — произвольное решение включения (8), т. е.

$$x(t) = x(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t} v(\tau)\, d\tau, \ x(0) = x^0, \tag{10}$$

где $t_i = 2\pi i, \ v(t) \in X(t, x(t)), \ t \in [t_i, t_{i+1}], \ i = 0, 1, \ldots$

Рассмотрим функцию

$$x^1(t) = x^1(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t} v^1(\tau)\, d\tau, \ x^1(0) = x^0, \tag{11}$$

где

$$\| v(t) - v^1(t) \| = \min_{v^1 \in X(t, x^1(t_i))} \| v(t) - v^1 \|. \tag{12}$$

Согласно [8] существует измеримая функция $v^1(t)$, определенная условием 12). Из (10) и (11) следует, что

$$\| x(t) - x^1(t) \| \leqslant \| x(t_i) - x^1(t_i) \| + \varepsilon \int_{t_i}^{t} \| v(\tau) - v^1(\tau) \| \, d\tau. \tag{13}$$

Очевидно, что $\| x(t) - x^1(t_i) \| \leqslant \| x(t) - x(t_i) \| + \| x(t_i) - x^1(t_i) \| \leqslant \delta_i + \varepsilon M (t - t_i)$; $\delta(X(t, x(t)), \ X(t, x^1(t_i))) \leqslant \lambda [\delta_i + \varepsilon M (t - t_i)]$; $\| v(t) - v^1(t) \| \leqslant \lambda [\delta_i + \varepsilon M (t - t_i)]$, где $\delta_i = \| x(t_i) - x^1(t_i) \|$.

Следовательно, из неравенства (13) имеем

$$\delta_{i+1} \leqslant \delta_i + \varepsilon 2\lambda\pi (\varepsilon\pi M + \delta_i), \ \delta_0 = 0, \ i = 0, 1, \ldots \tag{14}$$

Так как $2\pi (i + 1) \leqslant L\varepsilon^{-1}$, то из (14) получим

$$\delta_{i+1} \leqslant M\pi (e^{\lambda L} - 1)\, \varepsilon. \tag{15}$$

Учитывая, что при $t \in [t_i, t_{i+1}]$ справедливы неравенства

$$\| x(t) - x(t_i) \| \leqslant 2\pi M\varepsilon, \ \| x^1(t) - x^1(t_i) \| \leqslant 2\pi M\varepsilon, \tag{16}$$

с помощью (15) получаем

$$\| x(t) - x^1(t) \| \leqslant \pi M (e^{\lambda L} + 3)\, \varepsilon. \tag{17}$$

Запишем функцию $x^1(t)$ в точках t_i:

$$x^1(t_{i+1}) = x^1(t_i) + \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} v^1(\tau)\, d\tau = x^1(t_i) + \varepsilon \bar{v}^i 2\pi. \tag{18}$$

Из условия (12) следует, что $\bar{v}^i \in \overline{X}(x^1(t_i))$.

Рассмотрим функцию

$$\xi^1(t) = \xi^1(t_i) + \varepsilon \bar{v}^i (t - t_i), \ \xi^1(0) = x^0, \ t \in [t_i, t_{i+1}]. \tag{19}$$

Из выражений (16), (18) и (19) имеем

$$\| x^1 (t - \xi^1 (t) \| \leqslant 2\pi M\varepsilon. \tag{20}$$

Так как при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots$ $\| \xi^1 (t) - \xi^1 (t_i) \| \leqslant 2\pi M\varepsilon$, $\delta (\overline{X} (\xi(t_i)), \overline{X} (\xi^1 (t))) \leqslant 2\lambda\pi M\varepsilon$, то

$$\rho \left(\frac{d\xi^1 (t)}{dt}, \ \varepsilon \overline{X} (\xi^1 (t)) \right) \leqslant 2\lambda\pi M\varepsilon^2. \tag{21}$$

Согласно теореме статьи [8] из неравенства (21) следует, что существует решение $\xi (t)$ дифференциального включения (2) такое, что

$$\| \xi (t) - \xi^1 (t) \| \leqslant \varepsilon^2 2\lambda\pi M \int\limits_0^t e^{\varepsilon\lambda\tau} d\tau \leqslant \varepsilon 2\pi M (e^{\lambda L} - 1). \tag{22}$$

Из неравенств (17), (20) и (22) получаем

$$\| x (t) - \xi (t) \| \leqslant c_1 \varepsilon, \tag{5'}$$

где $c_1 = 3\pi M (e^{\lambda L} + 1)$. Таким образом, доказана первая часть утверждения теоремы.

Взяв произвольное решение $\xi (t)$ включения (2) и проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно построить решение $x (t)$ включения (1) такое, что справедливо неравенство вида (5′) с некоторой постоянной c_2. Выбирая $c = \min (c_1, c_2)$ и $\varepsilon^0 > 0$ таким образом, чтобы решения $x (t)$ не выходили за ρ-окрестность решений $\xi (t)$, покажем справедливость всех утверждений теоремы.

Доказанная теорема дает в общем случае обоснование использования алгоритма усреднений движения в задачах управления. Действительно, пусть

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f (x, u, t), \ x (0) = x^0, \tag{23}$$

где $u (t) \in U \subset R^m$ — вектор управления, U — компактное множество. Перейдем от уравнений движения (23) к дифференциальному включению (1), где $X (t, x) = f (x, U, t)$.

Дальнейшее исследование задачи управления можно проводить с использованием соответствующего усредненного включения (2). Некоторые случаи усреднения для систем (23) специального вида содержатся в [10—12]. Заметим, что множества $\overline{R} (t)$ и $R^1 (t)$, входящие в оценку (6), — R-решения [13] дифференциальных включений (2) и (8) соответственно.

По аналогии с системами дифференциальных уравнений [14] введем следующие два определения.

Определение 1. R-решение $R (t)$ дифференциального включения (8) будем называть устойчивым по Ляпунову, если для любых $\eta > 0$ и $t_0 \in [0, +\infty)$ можно указать $\delta = \delta (\eta, t_0)$ такое, что 1) все решения $Y (t)$ включения (8), удовлетворяющие условию

$$\delta (Y (t_0), R (t_0)) < \delta (\eta, t_0), \tag{24}$$

определены для всех $t \geqslant t_0$;

2) для решений, удовлетворяющих неравенству (24), выполняется неравенство $\delta (Y (t), R (t)) < \eta$ при всех $t \geqslant t_0$.

Определение 2. R-решение $R (t)$ называется асимптотически устойчивым, если 1) оно устойчиво; 2) при любом $t_0 \in [0, +\infty)$ существует такое $\Delta = \Delta (t_0) > 0$, что для всякого решения $Y (t)$, для которого $\delta (Y (t_0), R (t_0)) < \Delta (t_0)$, имеет место

$$\lim_{t \to \infty} \delta (Y (t), R (t)) = 0.$$

Область $\Delta (t_0)$ называется областью притяжения решения $R (t)$.

Заметим, что рассмотрение аналогичных понятий для включения (1) требует введения хаусдорфовой полуметрики [4] условием

$$\delta(P, Q) = \inf\{d \mid P \subset S_d(Q),\ Q \subset S_d(P)\},$$

так как множества $Y(t)$ и $R(t)$ не обязательно будут компактными.

Рассмотрим возможность усреднения дифференциальных включений на бесконечном промежутке.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, а также следующее условие: R-решение $\overline{R}(t)$ включения (2) равномерно асимптотически устойчиво.*

Тогда можно указать такие $\varepsilon^0 > 0$ и $c > 0$, что для $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon^0$ при всех $t \geqslant 0$ будет выполняться неравенство

$$\delta(\overline{R}(t), R^1(t)) \leqslant c\varepsilon. \tag{25}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству, приведенному в работе [14], необходимо только ссылку на теорему Н. Н. Боголюбова заменить ссылками на теорему 1 и провести все оценки в смысле метрики Хаусдорфа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев: Изд-во АН УССР, 1945.— 139 с.
2. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев: Наук. думка, 1971.— 440 с.
3. Куратовский К. Топология. Т. I. М.: Мир, 1966.— 595 с.
4. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.— М.: Наука, 1977.— 624 с.
5. Ляпунов А. А. О вполне аддитивных вектор-функциях.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, 4, № 6, с. 465—478.
6. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности.— М.: Наука, 1977.— 392 с.
7. Ли Э. Б., Маркус С. Основы теории оптимального управления.— М.: Наука, 1972.— 576 с.
8. Филиппов А. Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. и мех., 1967, № 3, с. 16—26.
9. Благодатских В. И. Некоторые результаты по теории дифференциальных включений.— Summer school on ordinary differential equations, Brno, 1975, part II, p. 35—62.
10. Плотников В. А. Асимптотические методы в задачах оптимального управления. Одесса: Изд-во Одесск. ун-та, 1976.— 103 с.
11. Небеснов В. И., Плотников В. А. Математические методы исследования режимов работы судовых комплексов. — М.: Рекламинформбюро ММФ, 1977.—72 с.
12. Небеснов В. И., Плотников В. А., Кузюшин А. Я. Оптимальное управление ВРШ на волнении.— М.: «Пищевая промышленность», 1974.— 88 с.
13. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления.— Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977.— 208 с.
14. Филатов А. И. Методы усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях.— Ташкент.: Фан, 1971.— 280 с.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию
28.III 1978 г.