УДК 517.949.2:513.77+519.4

В. Г. Самойленко

О разностном операторе с бесконечным числом переменных

В заметке изучаются условия существенной самосопряженности и спектр разностного оператора с бесконечным числом индексов. Методы доказательства основаны на методах, изложенных в работах [1—3]. Интерес к изучению подобного класса операторов стимулируется проблематикой квантовой теории поля.

Рассмотрим гильбертово пространство $l_2(\mathbf{R}^\infty)$ последовательностей $u=(u_\alpha)_{\alpha\in A}$, где A — множество мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, α_i — произвольные целые числа, $(u,v)_{l_2(\mathbf{R}^\infty)}=\sum\limits_{\alpha\in A}u_\alpha\bar{v}_\alpha$. Согласно работе [1] вектор $u=(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ называется финитным, если существуют числа $N_i>0$ $(i=1,2,\ldots)$ такие, что $u_\alpha=0$ как только для какого-нибудь i $|\alpha_i|>N_i$, или цилиндрическим, если существует число $\nu(u)$ такое, что $u_\alpha=0$, при хотя бы одном $\alpha_i\neq 0$, для $i>\nu(u)$. Множество $l_{2,0,\text{ц}}$ всех финитных цилиндрических векторов плотно в $l_2(\mathbf{R}^\infty)$. Подробнее о построении пространств бесконечного числа переменных описано в монографии [1].

Рассмотрим разностное выражение

$$(Lu)_\alpha=\sum_{i=1}^{\infty}\left(a^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots}u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots}+a^{(i)}_\alpha u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots}\right)+c_\alpha u_\alpha,$$

где $a^{(i)}_\alpha$, c_α — действительные числа. Допустим, что для любого k и произвольного набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ сходятся ряды

$$\sum_{j>k}|a^{(j)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}|^2,\qquad \sum_{j>k}|a^{(j)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots,0,-1_j,0,\ldots}|^2, \tag{1}$$

где -1_j означает, что j-й индекс равен -1. С помощью выражения L определим оператор $l_{2,0,\text{ц}}\ni u\to(Au)=(Lu)\in l_2(\mathbf{R}^\infty)$. Заметим, что оператор A не сохраняет цилиндричности и условие (1) — необходимо и достаточно для корректности его задания. Для доказательства надо вычислить норму Au $(u\in l_{2,0,\text{ц}})$.

Обозначим: $\tilde{A}$, $s(A)$ — замыкание и существенный спектр оператора A; $(\Delta^{(i)}_{\text{П}}$ $(\Delta^{(i)}_{\text{Л}})$ — правая (левая) разность по α_i, т. е.

$$(\Delta^{(i)}_{\text{П}}u)_\alpha=u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i+1,\ldots}-u_\alpha\ \left((\Delta^{(i)}_{\text{Л}}u)_\alpha=u_\alpha-u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i-1,\ldots}\right);$$

$$g^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}=c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}+\sum_{j=1;\,j\neq i}^{k}\left(a^{(j)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots,\alpha_k,0\ldots}+a^{(j)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}\right),$$

$$g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}=c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}+\sum_{j=1}^{k}\left(a^{(j)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_j-1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}+a^{(j)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}\right).$$

Лемма. *Если для любого вектора* $u \in l_{2,0,\text{ц}}$ $((Lu), u) \leqslant 0$ *и выполнены условия:* 1) *для любого* k *и* $i \leqslant k$ $\sum_n (\max_{|\alpha_j| \leqslant n; j=1,\ldots,k} |a^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}|)^{-1} = \infty$,

$$\sum_n (\max_{|\alpha_j| \leqslant n; j=1,\ldots,k} |g^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}|)^{-1} = \infty;$$

2) *для любого* k

$$\sum_n (\max_{|\alpha_j| \leqslant n; j=1,\ldots,k} |g_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}|)^{-1} = \infty;$$

3) *при* $k \to \infty$

$$\sum_{j>k} |a^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}|^2 \to 0, \quad \sum_{i>k} |a^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots,0-1_j,0\ldots}|^2 \to 0$$

равномерно относительно $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots)$, *то при данном начальном условии уравнение* $du/dt = (Lu)(t)$ *имеет единственное решение в классе вектор-функций таких, что* $\operatorname{Re}(du(\tau)/d\tau, u)$ — *суммируемая функция на сегменте* $[0, t]$.

Схема доказательства. а) Из того что $\left(\frac{du}{dt}\right)_\alpha = (Lu)_\alpha$ и $((Lu),u) \leqslant 0$ получаем

$$\operatorname{Re}\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^{(n,k)}, u^{(n,k)}\right) \leqslant \sum_{\nu=2}^{k} \operatorname{Re} \sum_{\alpha_j=-n+1; j\neq 1,\nu}^{n-1} \sum_{\alpha_\nu=-n}^{n} a^{(\nu)}_{n,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} \times$$

$$\times |(\Delta^{(\nu)}_{\text{П}} u^{(n,k)})_{n,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,0\ldots}|^2 + \ldots + \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re} \sum_{\alpha_i=-n+1; i\neq j}^{n-1} (-g^{(j)}_{\alpha_1,\ldots,n_j,\ldots,\alpha_k,0,\ldots}) \times$$

$$\times |u_{\alpha_1,\ldots,n_j,\ldots,\alpha_k,0\ldots}|^2 + \ldots + \operatorname{Re} \sum_{\alpha_j=-n+1; i\neq 1,2}^{n-1} (-g_{n,n,\alpha_3,\ldots,\alpha_k,0\ldots}) \times$$

$$\times |u_{n,n,\ldots\alpha_k,0\ldots}|^2 + \ldots + 2\operatorname{Re} \sum_{\alpha_i=-n+1; i=1,\ldots,k}^{n-1} \Big(\sum_{j>k} a^{(j)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0\ldots} u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots,0,1_j,0,\ldots} +$$

$$+ a^{(j)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots,0,-1_j,0,\ldots} u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots,0,-1_j,0,\ldots}\Big) \bar{u}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0,\ldots},$$

где точками обозначены аналогичные суммы с другими фиксированными индексами, равными n или $-n$ (берутся все различные варианты фиксирования m индексов, $m = 1, \ldots, k$). Кроме того, $u^{(n,k)}$ — «срезка» вектора u, т. е. $u^{(n,k)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k,0\ldots} = u_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k 0\ldots}$, когда $|\alpha_i| \leqslant n$ $(i = 1, \ldots, k)$, а остальные $u^{(n,k)}_\alpha = 0$. б) Учитывая условия леммы показываем, что существуют последовательности $\{n_m\}$, $\{k_m\}$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ $\operatorname{Re}((du/dt)^{(n_m,k_m)}, u^{(n_m,k_m)}) < \varepsilon$ при $m > m(\varepsilon)$. Переходя к пределу, при $m \to \infty$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ $\operatorname{Re}(du/dt, u) < \varepsilon$, следовательно, $\operatorname{Re}(du/dt, u) \leqslant 0$. в) Учитывая условие б) и то, что $\int_0^t \operatorname{Re}(du/d\tau, u)\, d\tau = \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2)$, где $u(t) \in l_2(\mathbf{R}^\infty)$ — решение уравнения $du/dt = (Lu)(t)$ с начальным условием $u(0) = 0$, получаем, что $u(t) \equiv 0$.

Теорема 1. *Пусть* $A \geqslant cE$ *и выполнены условия* 1) — 3) *леммы, тогда* A *существенно самосопряжен.*

Справедливость теоремы следует из леммы и теоремы 1.7 [1, § 1 гл. 6]. В дальнейшем для удобства выражение L запишем, используя частные разности:

$$(Lu)_\alpha = -\sum_{i=1}^{\infty} (\Delta_{\text{Л}}^{(i)} [a^{(i)} \cdot (\Delta_{\text{П}}^{(i)} u) \cdot])_\alpha + q_\alpha u_\alpha.$$

Допустим, что $a_\alpha^{(i)} \geqslant 0$, $A \geqslant cE$ и существенно самосопряжен. Заметим, что $a_\alpha^{(i)} \geqslant 0$ можно заменить.

Теорема 2. *Спектр оператора* $\tilde{A}$ *будет чисто дискретным на* $(-\infty, \mu)$, *если* $\varliminf\limits_{|\alpha|_+ \to \infty} q_\alpha = \mu$, *где* $|\alpha|_+ = \sum\limits_n n |\alpha_n|$.

Схема доказательства. а) Рассматриваем вспомогательный оператор A_0, заданный выражением L_0, у которого $a^{(i)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots, 0, -1_i, 0, \ldots} = 0$, $a^{(i)}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots} = 0$, если $i > n$, а остальные $a_\alpha^{(i)}$ совпадают с соответствующими коэффициентами выражения L. Для оператора $\tilde{A}_0$ методом расщепления [2] доказываем утверждение теоремы, что удается сделать в силу сохранения оператором $\tilde{A}_0$ цилиндричности векторов. б) Исходя из справедливости утверждения для $\tilde{A}_0$ доказываем справедливость утверждения для A.

Теорема 3. *Пусть оператор* $A' = A + q' \geqslant c'E$ *и существенно самосопряжен. Тогда, если* $\lim\limits_{|\alpha|_+ \to \infty} |q'_\alpha| = 0$, $s(\tilde{A}) = s(\tilde{A}')$.

Доказательство основано на методе квадратичных форм [3]. Доказывается компактность вложения пространства $l_2(\mathbf{R}^\infty)$, в пространство $l_2(\mathbf{R}^\infty, q')$ последовательностей $u = (u_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(u, v)_{l_2(\mathbf{R}^\infty, q')} = \sum\limits_{\alpha \in A} u_\alpha \bar{v}_\alpha |q'_\alpha|$, если вес q' удовлетворяет условию теоремы.

Заметим, что условия самосопряженности разностного оператора в случае одного индекса менее жесткие, чем сформулированные в теореме 1. Однако в случае нескольких индексов условия теоремы I ослабляют ограничения на коэффициенты [4]. Теоремы 2 и 3 подобны аналогичным теоремам в случае конечного числа индексов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березанский Ю. М. Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— К.: Наук. думка, 1978.— 360 с.
2. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.— М.: Физматгиз, 1963.— 369 с.
3. Бирман М. Ш. О спектре сингулярных граничных задач.— Мат. сб., 1961, **55**, № 10, с. 125—174.
4. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. К.: Наук. думка, 1965.— 798 с.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию 17.IV 1978 г.,
после переработки — 27.II 1979 г.