УДК 519.21

М. Ф. Черная

Условие эргодичности одного класса цепей Маркова, однородных по второй компоненте, с границей

При изучении распределений аддитивных функционалов на траекториях марковских цепей весьма эффективен аппарат марковских процессов, однородных по второй компоненте [1]. В работе изучается цепь Маркова (специального вида) с присоединенной к ней компонентой так, что пара (до момента попадания второй компоненты в фиксированное состояние) образует цепь Маркова, однородную по второй компоненте. В этом фиксированном состоянии вторая компонента проводит случайное время, распределенное, вообще говоря, не по показательному закону. Поэтому для исследования всего процесса (в рамках марковских процессов) приходится привлекать еще третью компоненту — время пребывания второй компоненты в фиксированном состоянии.

Указанная конструкция при кажущейся на первый взгляд искусственности естественна в прикладных задачах (многоканальные системы обслуживания с «доходами»: первая компонента характеризует состояние системы, вторая — суммарный доход от функционирования системы к моменту t, третья — время простоя).

Пусть T — некоторое счетное множество, $R=\{0, 1, 2, \ldots\}$. Рассмотрим однородный марковский процесс $x_t=\{\xi_t, \eta_t\}$, $t\geqslant 0$, где $\xi_t\in T$, $\eta_t\in R$, причем, если $\eta_t=0$, то вводится третья компонента ζ_t — время пребывания η_t в нуле. Зададим переходные вероятности процесса x_t за малое время Δ:

$$P\{(\alpha, k)\xrightarrow{\Delta}(\beta, k+r)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta_{0r}+\Delta[1-\delta_{-1,r}+\delta_{\beta\beta_0}\delta_{-1,r}]\rho_{\alpha\beta}(r)+o(\Delta)$$
$$(r\geqslant -1,\ k\geqslant 1),$$

$$P\{(\alpha, 0, x)\xrightarrow{\Delta}(\beta, 0, x+\Delta)\}=\delta_{\alpha\beta}+\Theta_{\alpha\beta}(x)\Delta+o(\Delta),$$
$$P\{(\alpha, 0, x)\xrightarrow{\Delta}(\gamma, k)\}=\varepsilon^k_{\alpha\gamma}(x)\Delta+o(\Delta)\ \ (k\geqslant 1), \tag{1}$$

где все функции $\Theta_{\alpha\beta}(x)$ и $\varepsilon^k_{\alpha\gamma}(x)$ непрерывны,

$$\sum_{\beta\in T}\sum_{r>0}\rho_{\alpha\beta}(r)+\rho_{\alpha\alpha}(0)+\rho_{\alpha\beta_0}(-1)=\sum_{\beta\in T}\Theta_{\alpha\beta}(x)+\sum_{\gamma\in T}\sum_{k\geqslant 1}\varepsilon^k_{\alpha\gamma}(x)\equiv 0$$

для $\forall\,\alpha\in T$, $\forall\,x>0$, а δ_{ij} — символ Кронекера. Здесь β_0 — некоторое «исключительное» состояние, обладающее свойством: когда η_t совершит скачок вниз на единицу, ξ_t обязательно примет значение β_0.

Цель работы — исследовать эргодическое распределение процесса x_t. Исследование проводится по схеме, предложенной в [2].

1. Предположим, что процесс x_t эргодичен. В этом случае, как известно из общей теории цепей Маркова с полумарковским вмешательством случая [2], финальная вероятность события $(\eta_t=0,\ \zeta_t\leqslant x)$ абсолютно непрерывна по x, и, стало быть, существуют такие константы $p_\alpha(k)$ и функции $q_\alpha(z)\geqslant\geqslant 0$, что, независимо от начального распределения

$$\lim_{t\to\infty}P\{\xi_t=\alpha,\ \eta_t=k\}=p_\alpha(k)\ \ (k>0),$$

$$\lim_{t\to\infty}P\{\xi_t=\alpha,\ \eta_t=0,\ \zeta_t\leqslant x\}=\int_0^x q_\alpha(z)\,dz.$$

Числа $p_\alpha(k)$ $(k>0)$ и функции $q_\alpha(z)$ подлежат определению. Используя (1), имеем уравнения

$$p_\alpha(k) = p_\alpha(k)(1+\rho_{\alpha\alpha}(0)\Delta) + \sum_{\beta\in T}\sum_{j=1}^{k-1} p_\beta(j)\rho_{\beta\alpha}(k-j) +$$

$$+\delta_{\alpha\beta_0}\sum_{\beta\in T} p_\beta(k+1)\rho_{\beta\beta_0}(-1)\Delta + \Delta\sum_{\beta\in T}\int_0^\infty q_\beta(x)\varepsilon_{\beta\alpha}^k(x)\,dx + o(\Delta), \quad (2)$$

$$q_\alpha(x+\Delta) = q_\alpha(x)(1+\Theta_{\alpha\alpha}(x)\Delta) + \Delta\sum_{\beta\neq\alpha} q_\beta(x)\Theta_{\beta\alpha}(x) + o(\Delta). \quad (3)$$

Выполнив несложные преобразования, приведем (2) и (3) соответственно к виду

$$0 = p_\alpha(k)\rho_{\alpha\alpha}(0) + \sum_{\beta\in T}\sum_{j=1}^{k-1} p_\beta(j)\rho_{\beta\alpha}(k-j) +$$

$$+\delta_{\alpha\beta_0}\sum_{\beta\in T} p_\beta(k+1)\rho_{\beta\beta_0}(-1) + \sum_{\beta\in T}\int_0^\infty q_\beta(x)\varepsilon_{\beta\alpha}^k(x)\,dx, \quad (4)$$

$$\frac{dq_\alpha(x)}{dx} = \sum_{\beta\in T} q_\beta(x)\Theta_{\beta\alpha}(x). \quad (5)$$

Введем неоднородную цепь Маркова ξ_x в фазовом пространстве $T\cup\{a\}$, где a — поглощающее состояние, со следующими вероятностями перехода за малое время Δ:

$$P\{\alpha \xrightarrow{(x,x+\Delta)} \beta\} = \delta_{\alpha\beta} + \Theta_{\alpha\beta}(x)\Delta + o(\Delta),\ P\{\alpha \xrightarrow{(x,x+\Delta)} a\} =$$

$$= \sum_{\gamma\in T}\sum_{k>0}\varepsilon_{\alpha\gamma}^k(x)\Delta + o(\Delta).$$

Обозначим

$$u_{\alpha\beta}(x) = P\{\xi_x = \beta \mid \xi_0 = \alpha\}. \quad (6)$$

Тогда $u_{\gamma\alpha}(x+\Delta) = u_{\gamma\alpha}(x)(1+\Theta_{\alpha\alpha}(x)\Delta) + \sum_{\beta\neq\alpha} u_{\gamma\beta}(x)\Theta_{\beta\alpha}(x)\Delta + o(\Delta)$. Как и ранее, получим уравнение

$$\frac{du_{\gamma\alpha}(x)}{dx} = \sum_{\beta\in T} u_{\gamma\beta}(x)\Theta_{\beta\alpha}(x), \quad (7)$$

с начальным условием $u_{\gamma\alpha}(0) = \delta_{\gamma\alpha}$, или в матричной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi(x)}{dx} = \Pi(x)\Theta(x), \\ \Pi(0) = I, \end{cases} \quad (8)$$

где $\Pi(x) = (u_{\alpha\beta}(x))$, $\Theta(x) = (\Theta_{\alpha\beta}(x))$.

Решение системы (8) можно записать в виде матриціанта [3]: $\Pi(x) = \Omega_0^x(\Theta(\cdot))$.

Сравнивая уравнения (5) и (7), получаем

$$q_\beta(x) = \sum_{\gamma\in T} c_\gamma u_{\gamma\beta}(x). \quad (9)$$

Так как $q_\beta(0) = \delta_{\beta\beta_0} \sum_{\gamma\in T} p_\gamma(1)\,\rho_{\gamma\beta_0}(-1)$ и, в силу (9), $q_\beta(0) = c_\beta$, то $q_\beta(0) = \delta_{\beta\beta_0} c_\beta$. Следовательно, (9) имеет вид

$$q_\beta(x) = \sum_{\gamma\in T} p_\gamma(1)\,\rho_{\gamma\beta_0}(-1)\,u_{\beta_0\beta}(x). \tag{10}$$

Подставив в (4) вместо $q_\beta(x)$ его значение из (10) и введя обозначения

$$\sum_{\beta\in T}\int_0^\infty u_{\beta_0\beta}(x)\,\varepsilon^k_{\beta\alpha}(x)\,dx = V^k_{\beta_0\alpha},\quad -p_\alpha(k)\,\rho_{\alpha\alpha}(0) = h_\alpha(k),$$

$$\frac{\rho_{\beta\alpha}(j)}{-\rho_{\beta\beta}(0)} = c_{\beta\alpha}(j),\quad c_{\beta\beta_0}(-1)\,V^k_{\beta_0\alpha} = c^*_{\beta\alpha}(k),$$

получим

$$h_\alpha(k) = \sum_{\beta\in T}\sum_{j=1}^{k-1} h_\beta(j)\,c_{\beta\alpha}(k-j) + \delta_{\alpha\beta_0}\sum_{\beta\in T} h_\beta(k+1)\,c_{\beta\beta_0}(-1) + \\ + \sum_{\beta\in T} h_\beta(1)\,c^*_{\beta\alpha}(k). \tag{11}$$

2. Рассмотрим цепь Маркова (ξ_n, η_n) с вероятностями перехода за один шаг:

$$P\{(\beta, 1)\to(\alpha, 1)\} = c^*_{\beta\alpha}(1),$$

$$P\{(\beta, 1)\to(\alpha, k)\} = c^*_{\beta\alpha}(k) + c_{\beta\alpha}(k-1)\quad (k\geqslant 2),$$

$$P\{(\beta, j)\to(\alpha, k)\} = c_{\beta\alpha}(k-j)\quad (1 < j < k),$$

$$P\{(\beta, k+1)\to(\alpha, k)\} = \delta_{\alpha\beta_0} c_{\beta\beta_0}(-1).$$

Тогда (11) — система уравнений вида $p_k = \sum_j p_j p_{jk}$, определяющая эргодическое распределение $\{p_i\}$ марковской цепи с матрицей вероятностей перехода $P = (p_{mn})$.

Если $\gamma_\alpha(k)$, $\alpha\in T$, $k\geqslant 1$, — эргодическое распределение цепи (ξ_n, η_n), то решение системы (11) имеет вид $h_\alpha(k) = c\gamma_\alpha(k)$, $\alpha\in T$, $k\geqslant 1$, где c — постоянная, определяющаяся из условия нормировки

$$\sum_{\alpha\in T}\sum_{k>0} p_\alpha(k) + \sum_{\alpha\in T}\int_0^\infty q_\alpha(x)\,dx = 1.$$

Найдем условие эргодичности цепи (ξ_n, η_n). Будем исследовать на эргодичность состояние $(\beta_0, 1)$. Пусть τ — время возвращения в состояние $(\beta_0, 1)$. Задача состоит в том, чтобы найти условие, при котором $M\tau < \infty$ (M — символ математического ожидания).

Введем вспомогательные случайные величины: $N = \inf\{n : \eta_n > 1\}$; $\tau^k_{k-1}(\alpha)$ — время перехода из (α, k) в $(\beta_0, k-1)$; τ^k_{k-1} — время перехода из (β_0, k) в $(\beta_0, k-1)$.

Предположим, что множество состояний $D = \{(\alpha, 1)\}$ не замкнуто. Тогда N — собственная случайная величина.

Учитывая все возможные пути возвращения в $(\beta_0, 1)$, получаем равенство

$$P\{\tau = n\} = x_n + \sum_{k=2}^\infty\sum_{\alpha\in T}\sum_{t=1}^n y_t(\alpha, k)\,P\{\tau^k_{k-1}(\alpha) + \tau^{k-1}_{k-2} + \ldots + \tau^2_1 = n - t\}, \tag{12}$$

где

$$x_n = P\{\tau = n, \eta_1 = \ldots = \eta_{n-1} = 1\}, \ y_t(\alpha, k) = P\{\xi_N = \alpha, \quad \eta_N = k > 1, \ N = t, \ \tau > N\}. \tag{13}$$

Распределение любого слагаемого справа в (12) от k не зависит, и величины $\tau_{k-2}^{k-1}, \ldots, \tau_1^2$ одинаково распределены. Поэтому, переходя в (12) к математическому ожиданию, получаем

$$M\tau = \bar{x} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\alpha \in T} \sum_{t=1}^{\infty} y_t(\alpha, k)\left[(k-2) M\tau_1^2 + M\tau_1^2(\alpha) + t\right], \tag{14}$$

где $\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x_n$.

Сначала найдем условия, при которых $M\tau_1^2 < \infty$. Рассмотрим состояние $(\alpha, 2)$ цепи (ξ_n, η_n) и обозначим $\nu_\alpha = \inf\{n : \xi_n = \beta_0\}$. Тогда $\eta_{\nu_\alpha} \geqslant 1$. Справедливо стохастическое равенство

$$\tau_1^2(\alpha) \doteq \nu_\alpha + \sum_{k=2}^{\eta_{\nu_\alpha}} \tau_{k-1}^k, \tag{15}$$

и, в частности,

$$\tau_1^2 \doteq \nu + \sum_{k=2}^{\eta} \tau_{k-1}^k \tag{16}$$

(здесь $\nu \equiv \nu_{\beta_0}$, $\eta \equiv \eta_{\nu_{\beta_0}}$).

Введем производящие функции:

$$g(s) = Ms^{\tau_1^2}; \ \Phi(s, \Theta) = M(s^\nu \Theta^\eta; \ \nu < \infty).$$

Используя (16), получаем:

$$g(s) = \Phi^*(s, g(s)), \tag{17}$$

где $\Phi^*(s, \Theta) = M(s^\nu \Theta^{\eta-1}; \ \nu < \infty)$. В силу теоремы Руше, уравнение $g = \Phi^*(s, g)$ имеет единственный корень $g(s)$, $0 \leqslant s < 1$, внутри области $|g| < 1$. Для того чтобы $g(1) = 1$, достаточно выполнения условия

$$\left.\frac{d\Phi^*(1, g)}{dg}\right|_{g=1} \leqslant 1, \text{ или } M\eta \leqslant 2.$$

Продифференцировав по s тождество (17) и положив затем $s = 1$, получим $M\tau_1^2 = M\nu \cdot (2 - M\eta)^{-1}$. Следовательно, $M\tau_1^2 < \infty$, если

$$M\nu < \infty \text{ и } M\eta < 2. \tag{18}$$

Выяснив с помощью (13), (15) смысл рядов, стоящих справа в (14), и учитывая (18), получим, что условие эргодичности состояния $(\beta_0, 1)$, а следовательно, и цепи Маркова (ξ_n, η_n), состоит в выполнении следующих неравенств:

$$M\nu < \infty, \ M\eta < 2, \ M(N; \tau > N) < \infty, \ M(\eta_N; \tau > N) < \infty,$$

$$M(\nu_{\xi_N}; \tau > N) < \infty, \ M(\eta_{\nu_{\xi_N}}; \tau > N) < \infty, \ \bar{x} < \infty.$$

3. Выясним условие эргодичности процесса x_t. Пусть $\tau^{(n)}$ — момент n-го попадания процесса x_t в состояние $(\beta_0, 0, 0)$. Тогда $\{\tau^{(n)}\}$ — последовательность точек регенерации процесса x_t.

Пусть η — время возвращения в $(\beta_0, 0, 0)$. Тогда справедливо стохастическое равенство

$$\eta \doteq \xi + \Delta_{\varkappa}(\delta) + \Delta_{\delta-2}^{\delta-1} + \ldots + \Delta_0^1, \tag{19}$$

где ξ — время до первого попадания из $(\beta_0, 0, 0)$ в состояние вида (γ, k), $k > 0$; $\Delta_\gamma(k)$ — время перехода из (γ, k) в $(\beta_0, k-1)$; Δ_{i-1}^i — время перехода из (β_0, i) и $(\beta_0, i-1)$.

Найдем математическое ожидание в (19). Так как величины Δ_{i-1}^i одинаково распределены, то

$$M\eta = \sum_{\gamma \in T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} [x + \overline{\Delta}_\gamma + (k-1)\overline{\Delta}]\, r_{\beta_0\gamma}^k(x)\, dx,$$

где $r_{\beta_0\gamma}^k(x) = \sum_{\beta \in T} u_{\beta_0\beta}(x)\, \varepsilon_{\beta\gamma}^k(x)$ ($u_{\beta_0\beta}(x)$ определяется в (6)).

Выясним сначала условие, при котором $\overline{\Delta} < \infty$. Рассмотрим случайную величину Δ_0^1. Выходя из $(\beta, 1)$, процесс x_t либо попадает за один шаг в $(\beta_0, 0, 0)$, либо осуществит серию переходов вида

$$(\beta, 1) \to (\beta_1, k_1) \to \cdots \to (\beta_m, k_m) \to (\beta_0, k),$$
$$\text{где } 1 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_m, \; k = k_m - 1.$$

Пусть ζ_β — время перехода, а Θ_β — разность между крайними значениями второй компоненты x_t в указанных выше сериях. Тогда

$$\Delta_0^1 = \begin{cases} x, & \text{если } \zeta_{\beta_0} = x,\ \Theta_{\beta_0} = -1, \\ x + \Delta_{k-1}^k + \cdots + \Delta_0^1, & \text{если } \zeta_{\beta_0} = x,\ \Theta_{\beta_0} = k-1 \ (k \geqslant 1). \end{cases} \tag{20}$$

Обозначим

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} P\{\zeta_\beta \in dx,\ \Theta_\beta = l\} = u_{\beta l}(s).$$

Так как

$$\zeta_\beta = \begin{cases} \Delta + \zeta_\beta : 1 + \rho_{\beta\beta}(0)\Delta + o(\Delta), \\ \Delta : \quad \rho_{\beta\beta_0}(-1)\Delta + o(\Delta), \\ \Delta + \zeta_\gamma : \sum_{r>0} \rho_{\beta\gamma}(r)\Delta + o(\Delta), \end{cases}$$

то получим

$$u_{\beta l}(s) = \frac{\rho_{\beta\beta_0}(-1)}{s - \rho_{\beta\beta}(0)} + \sum_{\gamma \in T} \sum_{r=1}^{l+1} \frac{\rho_{\beta\gamma}(r)}{s - \rho_{\beta\beta}(0)}\, u_{\gamma, l-r}(s). \tag{21}$$

Нетрудно показать, что решение системы (21) существует, единственно и может быть найдено методом редукции [4].

Обозначим $M\exp\{-s\Delta_0^1\} = \varphi_{\beta_0}(s)$. Согласно (20) имеем

$$\varphi_{\beta_0}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{\beta_0}(s))^k\, u_{\beta_0 k}(s). \tag{22}$$

Используя (22), получаем что $\overline{\Delta} < \infty$, если $M\zeta_{\beta_0} < \infty$ и $M\Theta_{\beta_0} < 0$. Аналогично $\overline{\Delta}_\gamma < \infty$, если $M\Theta_\gamma < \infty$ и $M\zeta_\gamma < \infty$ $\forall \gamma \in T$.

Таким образом, процесс x_t эргодичен, если $M\Theta_\gamma < \infty$ и $M\zeta_\gamma < \infty$ $\forall \gamma \in T$; $M\Theta_{\beta_0} < 0$; ряд $\sum_{\gamma \in T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} [x + \overline{\Delta}_\gamma + (k-1)\overline{\Delta}]\, r_{\beta_0\gamma}^k(x)\, dx$ сходится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ежов И. И., Скороход А. В. Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I.— Теория вероятностей и ее применение, 1969, 14, вып. 1, с. 3—14.
2. Ежов И. И. Цепи Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс.— Укр. мат. журн., 1966, 18, № 1, с. 48—65.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— М.— Л.: Физматгиз, 1962.— 708 с.

Одесский
государственный университет

Поступила в редакцию
15.V 1978 г.