УДК 513.6

Н. И. Яцкин

Теорема Ляпунова—Флоке и аффинные отображения

1. Формы со значениями в алгебре Ли. Основные определения. Пусть M—гладкое связное многообразие. Гладкая дифференциальная 1-форма $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{A})$ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{A}$ группы Ли A вполне интегрируема (т. е. вполне интегрируемо дифференциальное уравнение $D\Phi = \alpha$, где оператор D: $C^\infty(M, A) \to \Lambda^1(M, \mathfrak{A})$ для линейной группы A определен равенством $D\Phi = d\Phi \cdot \Phi^{-1}$, а в общем случае — аналогично, — см. [1 — 4]) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению $d\alpha = 1/2[\alpha, \alpha]$. Фундаментальное решение, соответствующее вполне интегрируемой форме α, определяется (см. [3, 4]) как решение уравнения $D\Phi = \tilde{\alpha}$ на универсальном накрывающем многообразии $\pi: \tilde{M} \to M$ (здесь $\tilde{\alpha} = \pi^*\alpha$), удовлетворяющее условию $\Phi(\mathrm{pt}) = 1$ в отмеченной точке $\mathrm{pt} \in \tilde{M}$ (здесь 1 — единица группы Ли A). Условимся считать действие $\pi_1(M)$ на $\tilde{M}$ правым. Гомоморфизм монодромии $\alpha^\# : \pi_1(M) \to A$ определяется равенством $\Phi(x.\gamma) = \Phi(x)\,\alpha^\#(\gamma)$, $\gamma \in \pi_1(M)$. Две вполне интегрируемые формы $\alpha, \beta \in \Lambda^1(M, \mathfrak{A})$ называются эквивалентными (или приводимыми одна к другой), если принадлежат одной орбите действия ρ группы $C^\infty(M, A)$, определенного равенством $\rho(Q)\,\alpha = DQ + (\mathrm{Ad}\,Q)\,\alpha$, $Q \in C^\infty(M, A)$. Известно [1], что формы α и β эквивалентны тогда и только тогда, когда их гомоморфизмы монодромии $\alpha^\#$, $\beta^\#$ сопряжены в группе A.

2. Постоянные формы. Пусть (M, ∇) — многообразие линейной связности. Форма $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{A})$ называется постоянной (самопараллельной), если $\nabla\alpha = 0$.

Связность ∇ на M может быть поднята до $\pi_1(M)$-инвариантной связности $\tilde{\nabla}$ на $\tilde{M}$: для этого на $\pi_1(M)$-инвариантных полях X, Y на $\tilde{M}$ определим $\tilde{\nabla}_X Y$ из равенства $\pi_*(\tilde{\nabla}_X Y) = \nabla_{\pi_* X}(\pi_* Y)$. Изоморфизм $\pi_{*,\mathrm{pt}} : T_{\mathrm{pt}}\tilde{M} \to T_{\mathrm{pt}}M$ позволяет считать группу голономии $H(M, \nabla, \mathrm{pt})$ многообразия (M, ∇) действующей на $T_{\mathrm{pt}}\tilde{M}$ и отождествлять группу голономии $H(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \mathrm{pt})$ многообразия $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ с ограниченной группой голономии $H_0(M, \nabla, \mathrm{pt})$ многообразия (M, ∇).

Постоянная форма однозначно определяется своим значением $\alpha(\mathrm{pt})$ в фиксированной точке, причем это значение (как линейное отображение из касательного пространства в пространство алгебры Ли $\mathfrak{A}$) инвариантно относительно группы голономии. В частности, у постоянной формы α на $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ ее значение $\alpha(\mathrm{pt})$ $H_0(M, \nabla, \mathrm{pt})$-инвариантно.

Лемма 1 [3, 4]. *Постоянная форма α на $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ есть поднятие некоторой постоянной формы на (M, ∇) тогда и только тогда, когда $\alpha(\mathrm{pt})$ $H(M, \nabla, \mathrm{pt})$-инвариантно.*

3. Представление Флоке. Пусть $\beta = \rho(Q)\,\alpha$ — вполне интегрируемая форма, приводимая к постоянной форме α. Тогда фундаментальные решения Φ_α, Φ_β форм α, β связаны (см. [3, 4]) равенством $\Phi_\beta(x) = Q(x) \times \Phi_\alpha(x)\,Q^{-1}(\mathrm{pt})$, или $\Phi_\beta(x) = Q_1(x)\,(Q(\mathrm{pt})\,\Phi_\alpha(x)\,Q^{-1}(\mathrm{pt}))$, где $Q_1(x) = Q(x)\,Q^{-1}(\mathrm{pt})$ и сомножитель в скобках — фундаментальное решение постоянной формы $\alpha_1 = (\mathrm{Ad}\,Q(\mathrm{pt}))\,\alpha$. Представление $\Phi_\beta(x) = Q_1(x)\,\Phi_{\alpha_1}(x)$ фундаментального решения приводимой (т. е. приводимой к постоянной) формы β в виде произведения $\pi_1(M)$-инвариантной функции Q_1 и фундаментального решения постоянной формы называется *представлением Флоке*. Заметим, что $\beta^{\#}(\gamma) = Q(\mathrm{pt})\,\alpha^{\#}(\gamma)\,Q^{-1}(\mathrm{pt})$ и $\beta^{\#}(\gamma) = \alpha_1^{\#}(\gamma)$, где $\gamma \in \pi_1(M)$.

Пусть для отображения $\Phi: \tilde{M} \to A$, удовлетворяющего условию $\Phi(\mathrm{pt}) = 1$, форма $\alpha = D\Phi$ постоянна на $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$. По лемме 1 форма α опускаема на M тогда и только тогда, когда значение $\alpha(\mathrm{pt}) = \Phi_{*,\mathrm{pt}}$ инвариантно относительно группы голономии $H(M, \nabla, \mathrm{pt})$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть β — вполне интегрируемая 1-форма на M. Следующие три утверждения эквивалентны*: 1) *форма β приводима к постоянной*; 2) *справедливо представление Флоке*; 3) *гомоморфизм $\beta^{\#}$ продолжается с орбиты* pt. $\pi_1(M)$ *до отображения $\Phi \in C^\infty(M, A)$, для которого 1-форма $D\Phi$ постоянна на $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ и дифференциал $\Phi_{*,\mathrm{pt}}$ $H(M, \nabla, \mathrm{pt})$-инвариантен.*

4. Аффинные отображения многообразий линейной связности. Пусть $(M_1, \nabla^{(1)})$, $(M_2, \nabla^{(2)})$ — два многообразия линейной связности. Отображение $\Phi: M_1 \to M_2$ называется *аффинным отображением* (или гомоморфизмом связностей), если для любой (кусочно-гладкой) кривой $\psi: [0, 1] \to M$ выполнено равенство (см. [5]) $T^{(2)}_{\Phi\cdot\psi}\Phi_{*,\psi(0)} = \Phi_{*,\psi(1)}T^{(1)}_{\psi}$, где $T^{(1)}, T^{(2)}$ — операторы параллельного переноса вдоль указываемых кривых в многообразиях $(M_1, \nabla^{(1)})$ и $(M_2, \nabla^{(2)})$ соответственно. Из определения выводится, что аффинное отображение коммутирует с экспоненциалами $\Phi\,\mathrm{Exp}^{(1)}_x = \mathrm{Exp}^{(2)}_{\Phi(x)}\Phi_{*,x}$, $x \in M_1$. Отсюда следует лемма.

Лемма 2 [5]. *Два аффинных отображения, совпадающие в некоторой точке вместе со своими дифференциалами, совпадают тождественно.*

5. Аффинные отображения многообразия линейной связности в группу Ли. Группу Ли A будем считать снабженной (плоской) связностью, отвечающей абсолютному параллелизму на A, заданному правоинвариантными векторными полями. Соответствующий параллельный перенос не зависит от кривой и определяется только ее концами, а именно: перенос из a_1 в a_2 есть $(R_{a_1^{-1}a_2})_{*,a_1}$, где R_a — оператор правого умножения. Если расписать определение аффинного отображения Φ из (M, ∇) в A, переводящего $\mathrm{pt} \in M$ в $1 \in A$, на кривой ψ в M, такой что $\psi(0) = \mathrm{pt}$, $\psi(1) = x$, то получим $(R_{\Phi(x)})_{*,1}\,\Phi_{*,\mathrm{pt}}(X) = \Phi_{*,x}(T_\psi X)$, где $X \in T_{\mathrm{pt}}M$, что эквивалентно равенству $\Phi_{*,\mathrm{pt}}(X) = (R_{\Phi^{-1}(x)})_{*,\Phi(x)}\,\Phi_{*,x}(T_\psi X)$ или в силу определения D — равенству $\langle (D\Phi)(\mathrm{pt}), X\rangle = \langle (D\Phi)(x), T_\psi X\rangle$. Последнее эквивалентно самопараллельности 1-формы $D\Phi$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Отображение $\Phi \in C^\infty(M, A)$ — аффинно тогда и только тогда, когда $\nabla(D\Phi) = 0$.*

6. Обобщенная теорема Ляпунова—Флоке. Из теорем 1 и 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть β — вполне интегрируемая 1-форма на M. Форма β приводима к постоянной тогда и только тогда, когда ее гомоморфизм монодромии $\beta^{\#}: \pi_1(M) \to A$ продолжается до аффинного отображения $\Phi: \tilde{M} \to A$ с дифференциалом, инвариантным относительно группы голономии $H(M, \nabla, \mathrm{pt})$.*

Замечание 1. Теорема 3 обобщает классическую теорему Ляпунова — Флоке ($M = T^1$ — окружность, $A = \mathrm{GL}(n)$) и теорему А. Л. Онищика [2], где $M = G/\Gamma$ — однородное пространство связной односвязной группы Ли G по дискретной подгруппе Γ, аффинное отображение из $\tilde{M} = G$ в A, переводящее единицу в единицу,— гомоморфизм групп Ли).

З а м е ч а н и е 2. Из изложенного в п. 4 следует, что аффинное отображение является «гомоморфизмом» в смысле работ [3, 4]. Обратное верно только при дополнительных ограничениях на M (постоянство кручения, сюръективность Exp).

ЛИТЕРАТУРА

1. О н и щ и к А. Л. Некоторые понятия и применения теории неабелевых когомологий.— Труды Моск. мат. о-ва, 1967, **17**, с. 44—88.
2. О н и щ и к А. Л. О вполне интегрируемых уравнениях на однородных пространствах.— Мат. заметки, 1971, **9**, № 4, с. 365—373.
3. Я ц к и н Н. И. Вопросы приводимости линейных дифференциальных уравнений на многообразиях к специальному виду.— ДАН СССР, 1975, **220**, № 4, с. 792—794.
4. Я ц к и н Н. И. Линейные дифференциальные уравнения на многообразиях. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Воронеж, 1975.—9 с.
5. K o b a y a s h i S., N o m i z u K. Foundations of differential geometry. Vol. 1, Intersc., John Wiley & Sons. New York — London, 1963.

Воронежский
лесотехнический институт

Поступила в редакцию
1.III 1976 г.